

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Левков Дмитрий Геннадиевич

**Квазиклассические методы
описания динамического
туннелирования в моделях
теории поля**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
академик
В. А. Рубаков

Москва 2005

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Квазиклассическое описание переходов при конечных энергиях	19
1.1 Переходы связанной системы через потенциальный барьер	19
1.2 Вычисление вероятности перехода	21
1.3 Классические надбарьерные переходы	28
1.4 Туннелирование при низких энергиях	31
1.5 Регуляризация туннельных решений	33
1.6 Проверка квазиклассического метода сравнением с точным квантово-механическим результатом	37
1.7 Регуляризация классических надбарьерных решений	41
Глава 2. Индуцированное туннелирование в квантовой теории поля при высоких энергиях	46
2.1 Модель скалярного поля со взаимодействием на границе	46
2.2 T/θ задача	48
2.2.1 Общая формулировка	48
2.2.2 Использование особенностей модели	51
2.3 Периодические инстантоны	54
2.4 Прямое туннелирование при низких энергиях	56
2.4.1 Решения при произвольных θ	56
2.4.2 Аналитическое доказательство существования критической энергии	62
2.5 Туннельное образование сфалерона при энергиях выше критической	65
2.5.1 Предел $N \rightarrow 0$	65
2.5.2 Численное решение	68

2.6	Предел $T \rightarrow 0$	72
2.6.1	Предельное решение	72
2.6.2	Решения при малых T	81
Глава 3. Метод инстантонов действительного времени		85
3.1	Общая формулировка	85
3.2	Пример применения	91
3.3	Квазиклассическое описание туннелирования при энергиях выше оптимальной	93
Глава 4. Особенности туннелирования в моделях квантовой космологии		96
4.1	Модель туннельного рождения замкнутой вселенной	96
4.2	Численное решение уравнения Уилера—Де Витта	98
4.3	Предел $\Lambda \rightarrow 0$	106
Заключение		108
Приложение А. Регуляризация классических надбарьерных решений в квантовой механике одной степени свободы		111
Приложение В. Периодические инстантоны при ненулевой массе в модели скалярного поля со взаимодействием на границе		114
Литература		116

Введение

В настоящее время основным методом расчета вероятностей процессов рассеяния в теориях со слабой связью является теория возмущений, в которой амплитуда рассеяния \mathcal{A} представляется в виде асимптотического ряда по степеням малой константы связи g . Теория возмущений не работает, однако, если амплитуда рассматриваемого процесса не может быть приближена степенным рядом в окрестности точки $g = 0$. В этом случае процесс является непertурбативным, для его описания необходимо привлекать специальные методы.

Из числа непertурбативных процессов следует выделить процессы туннельных переходов между состояниями, разделенными потенциальными барьерами. Как правило, асимптотика $g \rightarrow 0$ туннельной амплитуды может быть найдена с помощью квазиклассического метода, который состоит в следующем. Амплитуда перехода представляется в виде

$$\mathcal{A} = e^{iS/g^2}, \quad (1)$$

после чего вычисляются коэффициенты степенного разложения экспоненты $S(g^2) = S_0 + g^2 S_1 + \dots$. В квантовомеханических задачах первый коэффициент разложения, S_0 , может быть получен из решения $S(\mathbf{q})$ уравнения Гамильтона–Якоби [1]. Стандартный пример применения квазиклассического метода — приближение ВКБ к задаче о туннелировании частицы через одномерный потенциальный барьер. В этом случае решения уравнения Гамильтона–Якоби являются чисто мнимыми в классически запрещенной области, поэтому функция $S(q)$ может быть найдена как функционал действия, вычисленный на *действительной* траектории $q(\tau)$ — решении уравнения движения в евклидовом времени, $t = -i\tau$, с действительным евклидовым действием $S_E = -iS$.

Такая простая картина туннелирования не верна уже для квантовомеханических систем с несколькими степенями свободы, где, вообще говоря,

решения $S(\mathbf{q})$ уравнения Гамильтона–Якоби не являются чисто мнимыми в классически запрещенной области (см. недавнее обсуждение этого вопроса в работах [2, 3]). В связи с этим вводят понятие «смешанного» туннелирования, противопоставленного туннелированию «чистому», для которого функция $S(\mathbf{q})$ — чисто мнимая. Ясно, что «смешанное» туннелирование не может быть описано с помощью действительной траектории. Однако, ему можно поставить в соответствие *комплексную* траекторию. Как только такая траектория найдена, функция $S(\mathbf{q})$, а, следовательно, и экспоненциальная часть амплитуды перехода, вычисляется как функционал действия на этой классической траектории.

Особенно сложная ситуация возникает при рассмотрении переходов системы с достаточно сильным взаимодействием между степенями свободы, квантовые числа которой сильно меняются в процессе перехода. В таком случае методы, основанные на адиабатическом разложении вблизи действительной «туннельной траектории», не работают, в отличие от метода комплексных траекторий, который позволяет получить правильный результат.

Вариант метода комплексных траекторий, пригодный для вычисления амплитуд рассеяния, был сформулирован и проверен численно в работах¹ [7–9], см. также обзор [10]. Дальнейшие исследования [11–16] показали, что метод может быть применен также для вычисления туннельных волновых функций и вероятностей туннелирования, расщепления уровней в двухъямных потенциалах, а также вероятностей распада метастабильных состояний. Основным достоинством метода комплексных траекторий является то, что он легко обобщается на системы с большим, или даже бесконечным (теория поля) числом степеней свободы, в отличие, скажем, от методов, использующих решения уравнений Гамильтона–Якоби [1–3], или методов квазиклассических симуля-

¹ Следует отметить, что подобные методы применялись задолго до работ В. Миллера, и Т. Джорджа. К примеру, еще в 30-х годах Л.Д. Ландау использовал комплексные траектории для вычисления квазиклассических матричных элементов [4]. В 60-х годах нестационарный вариант метода применялся для вычисления вероятности ионизации атомов в переменном электромагнитном поле [5, 6].

ций в представлении начальных данных [7, 17–21].

Туннельные процессы встречаются во многих теоретико–полевых моделях, самые известные из них — распад ложного вакуума в теориях скалярного поля [22–24] и переход с изменением топологического числа в калибровочных теориях [25–27]. Туннелирование в теории поля во многом подобно квантовомеханическому туннелированию. Характерный масштаб энергий для туннельных переходов задается высотой E_s потенциального барьера, разделяющего начальные и конечные состояния, в рассмотренных выше примерах высоты барьеров равны энергиям критического пузыря [24] и сфалерона [28, 29] соответственно. При $E \ll E_s$ процесс туннелирования описывается действительным решением евклидовых уравнений поля, которое называется «отскоком» и «инстантоном» в случаях скалярных и калибровочных теорий. Соответствующая вероятность перехода подавлена фактором вида $\exp(-2S_E/g^2)$, где S_E/g^2 — евклидово действие инстантона или отскокового решения. Процессы вакуумного туннелирования происходят с малой вероятностью и не играют сколько–нибудь существенной роли в теориях поля со слабой связью², поэтому многообещающе выглядят такие ситуации, в которых переходы полевой системы через потенциальный барьер не подавлены.

Можно ожидать, что экспоненциальное подавление процесса перехода исчезает, если полевая система имеет энергию, сравнимую с высотой потенциального барьера. Так действительно происходит в процессах при высокой температуре [31–38], при большой плотности фермионов [39–43], или при наличии тяжелых частиц в начальном состоянии [44–46]. Имеется, однако, ситуация, которая является исключением из этого правила. Это — туннелирование, индуцированное столкновениями высокоэнергичных частиц.

Вопрос об индуцированном туннелировании возник около пятнадцати лет назад в контексте задачи о нарушении барионного числа в электрослабой теории. Дело в том, что Стандартная модель электрослабых взаимодействий —

²Возможное исключение составляют задачи космологии [30].

это калибровочная теория с группой $SU(2) \times U(1)$, которая, как и любая неабелева калибровочная теория, обладает дискретным набором физически эквивалентных вакуумов [26, 47]. Более того, известно, что переходы между различными вакуумами сопровождаются несохранением барионного и лептонного чисел [48, 49] — явлением, которое может быть обнаружено экспериментально. Достижимые на современных ускорителях энергии сравнимы с энергией сфалерона в электрослабой теории $E_s \sim 4\pi M_W/g^2 \sim 8$ ТэВ, поэтому интересен вопрос, можно ли обнаружить явление несохранения фермионных чисел экспериментально в столкновениях высоких энергий.

В работах [50, 51] с помощью теории возмущений на фоне инстантона было показано, что сечение процесса индуцированного туннелирования растет экспоненциально с ростом энергии столкновения, по крайней мере, при малых значениях последней. Дальнейшие исследования [52–55] показали, что вероятность процесса имеет экспоненциальный вид (см. также обзоры [56–58]):

$$\mathcal{P}(E) \propto e^{-F(E/E_s)/g^2}, \quad (2)$$

где экспонента подавления F — возрастающая функция энергии столкновения E . Предэкспоненциальный множитель зависит от константы связи степенным образом, и, следовательно, относительно мало существенен. Теория возмущений вокруг инстантона становится неприменимой, однако, в наиболее интересной области энергий $E \gtrsim E_s$.

Предложено несколько методов оценки качественного характера поведения функции $F(E/E_s)$ при высоких энергиях. Так, в работах [59, 60] проведен анализ надбарьерных переходов. Все полученные в этих работах классические конфигурации содержат параметрически большое число частиц в начальном состоянии, поэтому был сделан вывод, что процесс индуцированного туннелирования должен оставаться экспоненциально подавленным при всех энергиях. К такому же выводу можно прийти из соображений унитарно-

сти [61–63]. Однако, с помощью перечисленных методов невозможно исключить ситуацию, когда функция $F(E/E_s)$ стремится к нулю асимптотически при $E/E_s \rightarrow \infty$. Также следует отметить, что в практических задачах, таких как задача о нарушении барионного числа в электрослабой теории, недостаточно знать лишь качественный характер поведения туннельной экспоненты при $E/E_s \sim 1$, необходимо уметь вычислять по крайней мере порядок величины вероятности процесса.

Форма выражения (2) предполагает, что должна существовать определенная квазиклассическая процедура вычисления вероятности индуцированного туннелирования при высоких энергиях. Модификация метода комплексных траекторий, подходящая для решения этой задачи, была предложена и реализована численно в работах А. Н. Кузнецова, В. А. Рубакова, П. Г. Тинякова, Д. Т. Шона (метод КРТШ) [64–67]. Основным препятствием на пути квазиклассического описания индуцированного туннелирования служит то, что начальное состояние процесса, содержащее лишь две частицы, не является квазиклассическим. Поэтому метод комплексных траекторий должен быть дополнен удобным способом регуляризации начального состояния. Центральной величиной метода КРТШ является инклюзивная вероятность туннелирования из состояний с фиксированными энергией E и начальным числом частиц N :

$$\mathcal{P}(E, N) = \sum_{i,f} \left| \langle f | \hat{\mathcal{S}} \hat{P}_E \hat{P}_N | i \rangle \right|^2. \quad (3)$$

Здесь $\hat{\mathcal{S}}$ обозначает S -матрицу, а \hat{P}_E, \hat{P}_N — проекторы на состояния с фиксированными энергией и числом частиц. Предполагается, что состояния $|i\rangle$ и $|f\rangle$ являются пертурбативными возмущениями над различными вакуумами теории. Если энергия и начальное число частиц квазиклассически велики, $E = \tilde{E}/g^2$, $N = \tilde{N}/g^2$, вероятность многочастичного туннелирования (3) может быть вычислена с помощью метода комплексных траекторий. Ответ

имеет экспоненциальный вид:

$$\mathcal{P}(E, N) \propto e^{-F(\tilde{E}, \tilde{N})/g^2} . \quad (4)$$

Используя результат (3), можно вычислить экспоненту индуцированного туннелирования $F(E/E_s)$. Во-первых, ясно, что вероятность туннелирования из многочастичных состояний $\mathcal{P}(E, N)$ всегда выше, чем двухчастичная вероятность $\mathcal{P}(E)$. Действительно, любое начальное двухчастичное состояние может быть превращено в многочастичное с помощью добавления требуемого количества частиц, которые не влияют на процесс туннелирования. Вследствие этого выполнено неравенство $F(\tilde{E}) \geq F(\tilde{E}, \tilde{N})$. Более того, можно предположить [64], что предел $\tilde{N} \rightarrow 0$ многочастичной экспоненты $F(\tilde{E}, \tilde{N})$ совпадает с экспонентой подавления двухчастичного процесса:

$$F(\tilde{E}) = \lim_{\tilde{N} \rightarrow 0} F(\tilde{E}, \tilde{N}) . \quad (5)$$

Соотношение (5) основано на утверждении, что туннельная экспонента не зависит от деталей начального состояния, пока число содержащихся в нем частиц не становится параметрически большим [64, 68, 69]. Это предположение проверено вычислениями в нескольких порядках теории возмущений на фоне инстантона в калибровочной теории [65, 70], а также явно при всех энергиях в квантовомеханической модели с двумя степенями свободы [15, 16, 71, 72].

В роли комплексной траектории, используемой для вычисления многочастичной вероятности (3) в полевых моделях, выступает комплексное решение классических уравнений поля, найденное вдоль контура $ABCD$ в комплексном времени [66] (рис. 1). Комплексную динамику вдоль контура $ABCD$ можно условно понимать следующим образом. Части AB и CD контура соответствуют эволюции системы до и после туннелирования, которое представлено евклидовой частью BC контура. Классические уравнения поля дополнены определенными условиями, наложенными в начале и в конце квазиклассической эволюции (части A и D контура). Описанная краевая задача называется « T/θ задачей», а ее решения — « θ -инстантонами».

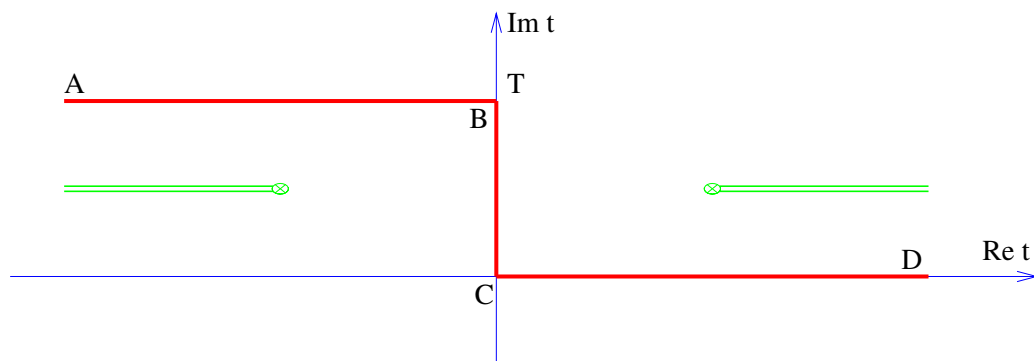


Рис. 1. Контур в комплексном времени, используемый в квазиклассической краевой задаче.

При разных значениях энергии столкновения необходимо использовать различные методы для решения T/θ задачи. При низких энергиях решение может быть приближено цепочкой инстантонов и антиинстантонов [66, 73–75]. При $E \sim E_s$, когда расстояние между инстантонами и антиинстантонами становится порядка их размера, низкоэнергетическое приближение перестает работать, и задачу приходится решать численно [16, 67, 76, 77]. При энергиях, превышающих E_s , встречается проблема [16, 67, 77], которая оказывается общей для задач, решаемых с помощью метода комплексных траекторий.

Известно, что в общем случае квазиклассическая краевая задача обладает бесконечным дискретным набором решений, только одно из которых является физически значимым. В одномерной квантовой механике все решения могут быть легко расклассифицированы. Однако, уже в квантовомеханических системах с несколькими степенями свободы такая классификация оказывается трудна, если вообще возможна. Если число степеней свободы невелико (например, $\mathcal{N} = 2$), можно прямым перебором найти решение, соответствующее максимальной вероятности туннелирования [7, 13, 14]. В системах с большим или бесконечным числом степеней свободы поиск физически значимого решения представляет серьезную проблему.

Проблема выбора правильного решения стоит наиболее остро в случаях, когда свойства физически значимой комплексной траектории различны при

различных энергиях системы. Именно такая ситуация возникает в задачах индуцированного туннелирования при высоких энергиях. Качественное изменение поведения квазиклассических решений связано с тем, что при $E > E_s$ классический надбарьерный переход через потенциальный барьер запрещен динамически, в отличие от случая низких энергий, где отсутствие надбарьерных решений гарантировано законом сохранения энергии. Экспоненциально подавленный процесс перехода, происходящий при энергиях, превышающих высоту потенциального барьера, называется динамическим туннелированием.

Примеры динамического туннелирования хорошо известны в теории рассеяния [7], туннелирование такого вида может происходить между квазивырожденными дискретными уровнями [78]. Именно динамическое туннелирование является предметом рассмотрения в настоящей диссертации.

В работах [71, 72, 79] обнаружено, что процесс индуцированного туннелирования при энергиях, превышающих определенную критическую энергию $E_c > E_s$, происходит следующим образом: система туннелирует с образованием состояния, близкого к вершине потенциального барьера, откуда и возобновляется классическая эволюция. С физической точки зрения этот процесс совсем не похож на потенциальное туннелирование при низких энергиях. Тем не менее, переходы остаются экспоненциально подавленными³, так как для того, чтобы оказаться на вершине барьера, системе необходимо претерпеть существенную перестройку внутреннего состояния. Энергия $E = E_c$ соответствует бифуркации решений T/θ задачи, где ветвь физически значимых решений встречается с нефизическими решениями. Таким образом, для вычисления экспоненты подавления процесса индуцированного туннелирования при $E > E_c$ необходимо решить проблему выбора физически значимых решений.

³Подобный экспоненциальный фактор возникает в многочастичных процессах в тривиальном секторе [62, 80–82].

В работах [71, 72, 83] (глава 1 настоящей диссертации) изучается описанная выше проблема в задаче о переходах связанной системы через потенциальный барьер. Для простоты рассматривается квантовомеханическая модель с двумя степенями свободы. На примере этой системы разрабатывается метод регуляризации, позволяющий автоматически выбирать правильную ветвь решений при $E > E_c$. В предлагаемом методе краевая задача регуляризуется таким образом, что пересечения различных ветвей решений регуляризованных уравнений не происходит. В пределе, когда параметр регуляризации ϵ стремится к нулю, восстанавливаются только физически значимые решения исходной краевой задачи. Метод проверен явным сравнением с точным квантовомеханическим результатом, полученным в результате численного решения уравнения Шредингера.

Замечательно то, что метод ϵ -регуляризации легко обобщается на модели теории поля, включая калибровочные теории. В работе [79] метод был применен к задаче о переходах с изменением топологического числа в электрослабой модели, что позволило найти решения T/θ задачи в области высоких энергий. Полученные результаты [79, 84] показали, что процесс несохранения барионного числа остается экспоненциально подавленным вплоть до крайне высоких энергий $E \sim 30E_s = 250$ ТэВ.

Следует отметить недостаток прямых численных методов поиска решений T/θ задачи. Дело в том, что характерная частота изменения решения быстро растет с ростом энергии столкновения, поэтому область значений энергии, в которой возможно применение численных методов, ограничена шагом доступной решетки. К примеру, в задаче о нарушении барионного числа в электрослабой теории найденные решения покрывают область $0 < E < 2.5E_s$. Таким образом, численные методы не позволяют исследовать процессы индуцированного туннелирования при энергиях, значительно превышающих высоту потенциального барьера, не говоря уж о пределе $E \rightarrow \infty$. Для получения надежных результатов в этой области необходимо рассмотрение простых мо-

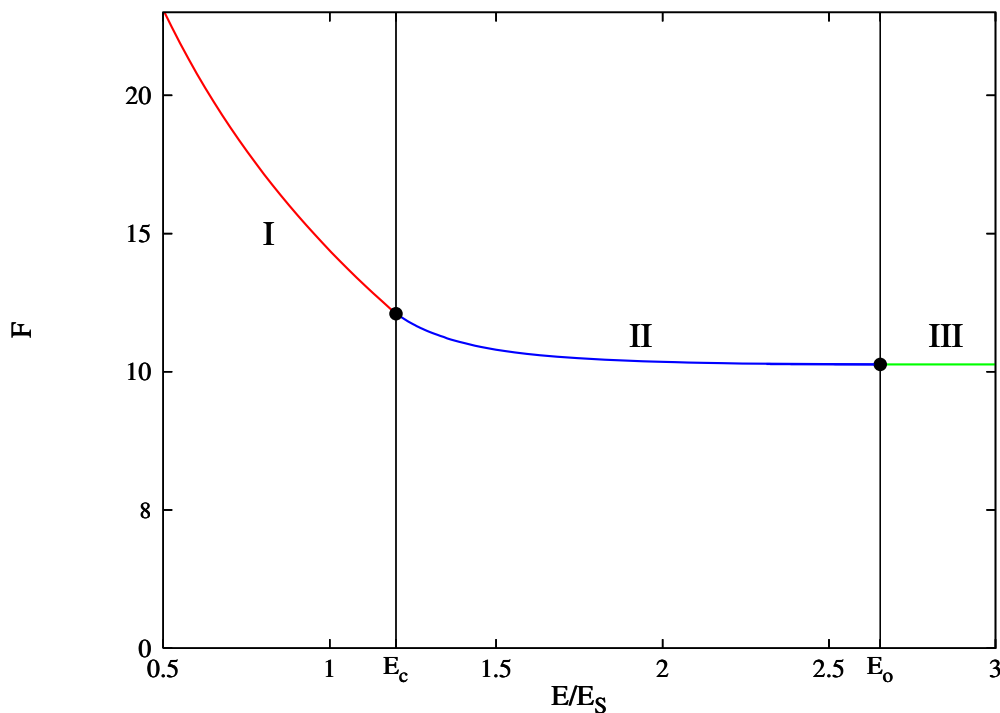


Рис. 2. Экспонента подавления процесса индуцированного туннелирования для модели главы 2.

делей, в которых задача может быть решена при всех энергиях.

В работе [85] (глава 2 диссертации) рассмотрена модель свободного скалярного поля $\phi(x, t)$ на полупрямой $x > 0$, взаимодействие которого локализовано на границе ($x = 0$). В рамках этой модели изучается туннельное рождение солитоноподобных состояний при столкновении высокоэнергичной частицы с границей. При этом удастся найти все физически значимые решения T/θ задачи. Полученная зависимость туннельной экспоненты F от энергии столкновения E приведена на рис. 2. Как и в главе 1, мы выделяем две области энергий (области I и II рисунка), в которых свойства решений качественно отличаются. При энергиях столкновения ниже критической энергии $E_c \approx 1.2E_s$ (область I) происходит обычное потенциальное туннелирование, когда подбарьерная эволюция системы заканчивается прямо в солитонном секторе. Этот режим может быть назван «прямым туннелированием». Экс-

попента подавления в этой области вычисляется по простой формуле:

$$F(E) = 4\pi \ln \left[\frac{\pi E_s}{E} \right], \quad E < E_c. \quad (6)$$

Формула (6), будучи продолжена в область $E > E_c$, показала бы исчезновение подавления при энергии $E = \pi E_s$. Однако, эта формула неверна при $E > E_c$, так как описывающие прямое туннелирование решения не существуют при энергиях выше критической. В области II рисунка физически значимые решения описывают туннелирование с образованием состояния, близкого к вершине барьера (сфалерона), которое затем распадается, производя солитон в конечном состоянии. Этот процесс происходит вплоть до энергии $E_o \approx 2.7E_s$, которую мы называем оптимальной энергией. При $E > E_o$ гладких решений T/θ задачи не существует.

Рассмотренная в главе 2 модель показывает, что метод КРТШ должен быть дополнен квазиклассическим методом нахождения туннельной экспоненты при $E > E_o$. Такой метод предложен в работе [86] (глава 3). Метод основан на наблюдении, что при оптимальной энергии достигается минимум экспоненты подавления, т.е. рост энергии столкновения при $E > E_o$ не приводит к увеличению вероятности туннелирования. Таким образом, в области III на рис. 2 имеем:

$$F(E) = F_m, \quad E > E_o. \quad (7)$$

Для рассмотренной в главе 2 модели $F_m = F(E_o) \approx 10.27$. В других, более сложных моделях, минимальное значение F_m экспоненты подавления, а также оптимальная энергия E_o , при которой это значение достигается, могут быть вычислены квазиклассически, используя новое семейство комплексных классических решений. Мы называем эти решения «инстантонами действительного времени», так как они определены в действительном времени, в отличие от обычных инстантонов, которые следует искать на евклидовой оси. Эти конфигурации насыщают инклюзивную вероятность туннелирования из состояний с фиксированным числом частиц N и любой (в том числе сколь

угодно большой) энергией (ср. с выражением (3)):

$$\mathcal{P}_{\text{rt}}(N) = \sum_{i,f} \left| \langle f | \hat{\mathcal{S}} \hat{P}_N | i \rangle \right|^2. \quad (8)$$

В главе 3 также исследован механизм перехода при $E > E_0$. Показано, что в этой области системе выгодно излучить избыток энергии ($E - E_0$), испустив несколько высокоэнергичных частиц, так что последующее туннелирование происходит с энергией, эффективно равной оптимальной энергии. Так как вероятность пертурбативного испускания частиц подавлена по константе связи лишь степенным образом, экспонента описанного выше процесса совпадает с туннельной экспонентой, найденной при оптимальной энергии. Механизм туннелирования, обнаруженный нами при $E > E_0$, совпадает с механизмом, предложенным в работе [87].

В экзотических моделях динамические эффекты могут быть существенны уже при описании вакуумного туннелирования. Такая ситуация возникает в моделях квантовой космологии при изучении процесса туннельного рождения замкнутой вселенной из «ничто» [88–93]. Отличительной чертой туннелирования в квантовой космологии служит то, что кинетический член масштабного фактора a и туннельный потенциал $V(a)$ входят в полный гамильтониан системы с отрицательным знаком. В связи с сохранением полной энергии, возбуждение материальных степеней свободы (рождение частиц) приводит к *увеличению* вероятности туннелирования. Как правило, вероятность рождения частиц в адиабатически медленно расширяющейся вселенной экспоненциально мала. С другой стороны, процесс туннелирования через потенциальный барьер также экспоненциально подавлен. Таким образом, динамика туннельного процесса зависит от параметров модели: если экспоненциальное подавление процесса рождения частиц оказывается слабее туннельного подавления, системе оказывается выгодно произвести достаточное количество частиц материи, полная энергия которых равна высоте потенциального барьера, и возобновить классическую эволюцию в области вблизи вершины

барьера. Такая возможность обсуждалась на качественном уровне в работе [92].

В работе [94] (глава 4 диссертации) изучается процесс катастрофического рождения частиц на примере модели минисуперпространства для замкнутой вселенной, наполненной массивным скалярным полем с конформной связью. Эффективное уравнение Уилера– Де Витта решается численно для нескольких типов модельных потенциалов и функций, характеризующих взаимодействие между материальными и гравитационными степенями свободы. Численные результаты подтверждают, что процесс катастрофического рождения частиц происходит в широком диапазоне значений параметров модели. Показано, что рождение частиц оказывает существенное обратное влияние на туннельный процесс. В частности, при малых значениях космологической постоянной величина волновой функции вселенной в области за потенциальным барьером получается экспоненциально больше, чем в случае пустой вселенной.

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения и двух приложений.

Глава 1 посвящена методу регуляризации комплексных траекторий и его проверке в квантовомеханической модели с двумя степенями свободы. Квантомеханическая модель введена в разделе 1.1. В разделе 1.2 приведен вывод квазиклассической T/θ задачи, используемой впоследствии для вычисления вероятностей переходов. Раздел 1.3 посвящен анализу надбарьерных переходов, в разделе 1.4 изучаются процессы потенциального туннелирования при низких энергиях. Там же показано, что описывающие потенциальное туннелирование комплексные траектории не существуют при энергиях, превышающих критическую энергию $E_c > E_s$. Техника ϵ -регуляризации квазиклассической краевой задачи введена в разделе 1.5. В разделе 1.6 проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода ϵ -регуляризации, с результатами численного решения полного уравнения Шредингера. В разделе 1.7 пока-

зано, что метод ϵ -регуляризации позволяет связать решения, описывающие туннельные переходы, с классическими надбарьерными решениями.

В главе 2 проведен анализ процесса индуцированного рождения солитоноподобных состояний в $(1+1)$ -мерной модели скалярного поля, которая введена в разделе 2.1. Общая T/θ задача и ее формулировка, удобная для решения рассматриваемой задачи, изложены в разделе 2.2 (подразделы 2.2.1 и 2.2.2 соответственно). В разделе 2.3 приведены аналитические формулы для частных решений T/θ задачи, которые называются «периодическими инстантонами». Прямое рождение солитоноподобных состояний при низких энергиях изучается в разделе 2.4. В частности, в подразделе 2.4.1 получена аналитическая формула (6) для подавления процесса индуцированного туннелирования, а в подразделе 2.4.2 приведено аналитическое доказательство существования критической энергии E_c , выше которой формула (6) неприменима. Переходы с образованием состояния около вершины потенциального барьера при энергиях, превышающих критическую энергию, рассмотрены в разделе 2.5. Подразделы ?? посвящены формулировке T/θ задачи в интересном пределе исчезающе малого числа частиц и поиску численных решений в этом пределе. Техника пертурбативных разложений, позволяющая получать результаты при энергиях, близких к оптимальной энергии E_o , изложена в разделе 2.6. А именно, в подразделе 2.6.1 получено решение в пределе $T \rightarrow 0$ ($E \rightarrow E_o$), в подразделе 2.6.2 рассматриваются решения при малых, но конечных T .

Глава 3 посвящена методу инстантонов действительного времени. Общий вывод квазиклассической краевой задачи приведен в разделе 3.1. В разделе 3.2 метод применен к простой модели главы 2. Квазиклассическое описание переходов при $E > E_o$ приведено в разделе 3.3.

В главе 4 изучен процесс туннельного рождения замкнутой вселенной, наполненной массивным скалярным полем с конформной связью. Модель скалярного поля и ее минисуперпространственная формулировка приведены в разделе 4.1. Раздел 4.2 посвящен поиску численных решений уравнения

Уилера–Де Витта. В разделе 4.3 рассмотрен физически интересный случай малых значений космологической постоянной.

В основу диссертации положены работы, выполненные в 2002–2005 годах в Отделе теоретической физики ИЯИ РАН и на кафедре Квантовой статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах ИЯИ РАН, Бостонского университета, университета Тафтса г. Кембридж (США), Брюссельского университета, на Международных семинарах «Кварки–2002» (Валдай), «Кварки–2004» (Пушкинские горы), на Международной школе «Частицы и космология» (Приэльбрусье, 2003 г.), на Международной конференции «Квантовая гравитация и суперструны–2002» (Дубна). Результаты опубликованы в работах [72, 79, 83, 85, 86, 94, 95].

Глава 1

Квазиклассическое описание переходов при конечных энергиях

1.1 Переходы связанной системы через потенциальный барьер

Результаты этой главы получены на примере иллюстративной квантовомеханической задачи о неупругих переходах связанной системы через потенциальный барьер. Система состоит из двух частиц одинаковой массы m , движущихся в одном измерении и связанных гармоническим потенциалом (рис. 1.3). Одна из частиц взаимодействует с отталкивающим потенциальным барьером. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{4}(x_1 - x_2)^2 + V_0 e^{-x_1^2/\sigma^2}. \quad (1.1)$$

Предполагается, что потенциальный барьер удовлетворяет условиям применимости квазиклассического приближения, а его высота V_0 сильно превышает расстояние $\hbar\omega$ между уровнями осциллятора:

$$\begin{aligned} \hbar\omega &\ll V_0, \\ \sigma &\gg \hbar/\sqrt{mV_0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Квантовомеханическая модель (1.1) была предложена в работах [15, 16] для прямой проверки метода КРТШ. В этой модели хорошо видны трудности, возникающие при квазиклассическом описании переходов несепарабельных систем через потенциальный барьер.

Мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, $m = 1$. Также удобно принять $\omega = 0.5$, после чего все физические величины становятся безразмерными. Условия (1.2) применимости квазиклассического приближения выполнены, если выбрать $\sigma = 1/g$, $V_0 = 1/g^2$, где g — малый параметр. Этот параметр несущественен на классическом уровне, так как он исчезает из классических уравнений движения после замены $x_1 \rightarrow x_1/g$, $x_2 \rightarrow x_2/g$.

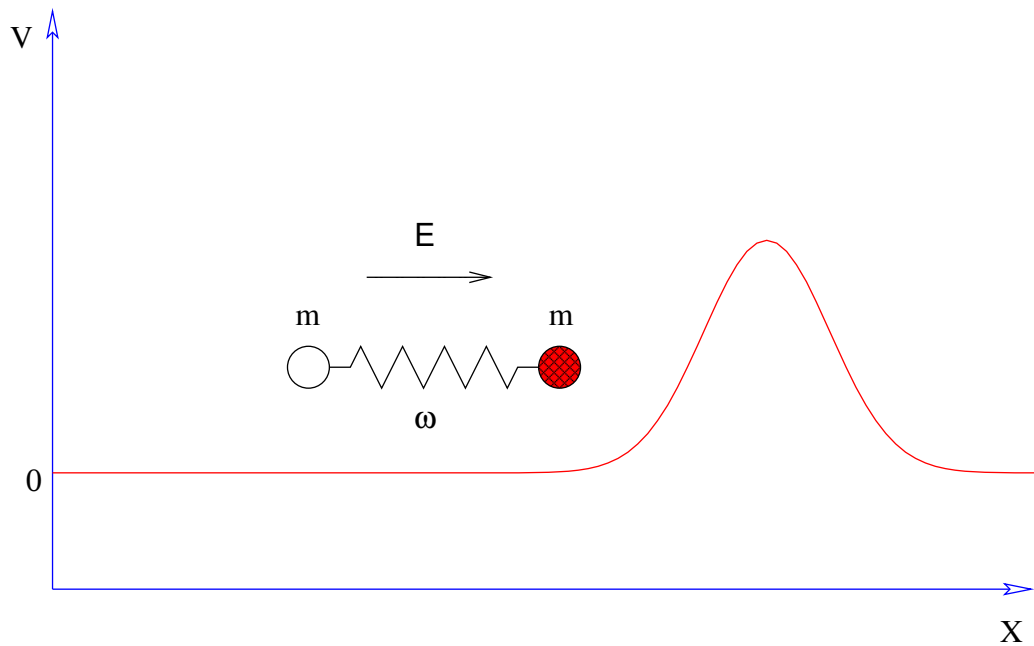


Рис. 1.1. Связанная система, туннелирующая через потенциальный барьер, с которым взаимодействует только темная частица.

Таким образом, квазиклассический метод можно понимать как асимптотическое разложение по степеням g^2 .

Удобно решать задачу в терминах координаты центра масс $X \equiv (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ и осцилляторной координаты $y \equiv (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$. После замены переменных функция Гамильтона (1.1) принимает вид

$$H = \frac{p_X^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}y^2 + \frac{1}{g^2}e^{-g^2(X+y)^2/2}. \quad (1.3)$$

Эдесь потенциал взаимодействия,

$$U_{\text{int}} \equiv \frac{1}{g^2}e^{-g^2(X+y)^2/2},$$

играет роль потенциального барьера, разделяющего асимптотические области $X \rightarrow \pm\infty$ свободного движения осциллятора частоты ω вдоль координаты центра масс. Асимптотическое начальное состояние связанной системы (1.3) полностью задается номером уровня осциллятора N и полной энергией $E = p_X^2/2 + \omega(N + 1/2)$. Будем рассматривать переходы системы через потенциальный барьер из состояния с заданными начальными значениями E и N .

1.2 Вычисление вероятности перехода

Вероятность перехода связанной системы из начального состояния с заданными энергией E и уровнем возбуждения осциллятора N через потенциальный барьер имеет вид

$$\mathcal{P}(E, N) = \lim_{t_f - t_i \rightarrow \infty} \sum_f \left| \langle f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | E, N \rangle \right|^2, \quad (1.4)$$

где неявно предполагается, что начальное и конечное состояния локализованы в асимптотических областях $X \rightarrow -\infty$ и $X \rightarrow +\infty$ соответственно. Будем рассматривать случай, когда энергия и уровень возбуждения осциллятора параметрически велики, т.е.

$$E = \tilde{E}/g^2, \quad N = \tilde{N}/g^2,$$

где \tilde{E} , \tilde{N} остаются постоянными при $g \rightarrow 0$. Покажем, что в этом случае вероятность (1.4) может быть вычислена квазиклассически.

Перепишем величину (1.4) следующим образом:

$$\mathcal{P}(E, N) = \lim_{t_f - t_i \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{+\infty} dX_f \int_{-\infty}^0 dX_i dX'_i \int_{-\infty}^{+\infty} dy_i dy'_i dy_f \mathcal{A}_{fi} \mathcal{A}_{i'f}^* \mathcal{B}_{ii'} \right\}, \quad (1.5)$$

где

$$\mathcal{A}_{fi} = \langle X_f, y_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | X_i, y_i \rangle$$

суть амплитуда перехода, а скалярные произведения начальных состояний собраны в величину

$$\mathcal{B}_{ii'} = \langle X_i, y_i | E, N \rangle \langle E, N | X'_i, y'_i \rangle. \quad (1.6)$$

Первым делом, представим вероятность (1.5) в виде функционального интеграла. Для этого воспользуемся интегральными представлениями для ампли-

туд

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{fi} &= \int [d\vec{x}] \Big|_{\substack{\vec{x}(t_i)=\vec{x}_i \\ \vec{x}(t_f)=\vec{x}_f}} e^{iS[\vec{x}]}, \\ \mathcal{A}_{i'f}^* &= \int [d\vec{x}'] \Big|_{\substack{\vec{x}'(t_i)=\vec{x}'_i \\ \vec{x}'(t_f)=\vec{x}'_f}} e^{-iS[\vec{x}']}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\vec{x} = (X, y)$, а $S[\vec{x}]$ обозначает функционал действия. Удобное представление для величины (1.6) выглядит следующим образом (см. работы [16, 72]):

$$\mathcal{B}_{ii'} = \int_{-i\infty}^{i\infty} dT d\theta \exp \left\{ -\frac{1}{g^2} B_i(\vec{x}_i, \vec{x}'_i; T, \theta) \right\}, \quad (1.8)$$

где

$$\frac{1}{g^2} B_i = \frac{(X_i - X'_i)^2}{4T} - \frac{\omega}{1 - e^{4\omega T + 2\theta}} \left[\frac{1}{2} (y_i^2 + y_i'^2) (1 + e^{4\omega T + 2\theta}) - 2y_i y_i' e^{2\omega T + \theta} \right]. \quad (1.9)$$

Подставляя выражения (1.7), (1.8) в формулу (1.5), и производя замену $\vec{x} \rightarrow \vec{x}/g$, $E \rightarrow \tilde{E}/g^2$, $N \rightarrow \tilde{N}/g^2$, получим искомое представление для вероятности перехода:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E, N) &= \lim_{t_f - t_i \rightarrow \infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dT d\theta \int [d\vec{x} d\vec{x}'] \exp \left\{ -\frac{1}{g^2} F[\vec{x}, \vec{x}'; T, \theta] \right\} \times \\ &\quad \times \delta[\vec{x}(t_f) - \vec{x}'(t_f)], \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$F[\vec{x}, \vec{x}'; T, \theta] = -iS[X, y] + iS[X', y'] - 2\tilde{E}T - \tilde{N}\theta + B_i(\vec{x}_i, \vec{x}'_i; T, \theta). \quad (1.11)$$

Далее будем опускать знак «тильда» над перемасштабированными величинами.

При малых g интеграл (1.10) может быть вычислен методом перевала. Выпишем условия экстремума для функционала F . Экстремум по значениям динамических координат $X(t)$, $y(t)$, $X'(t)$, $y'(t)$ при $t_i < t < t_f$ достигается, если выполнены классические уравнения движения:

$$\frac{\delta S}{\delta X(t)} = \frac{\delta S}{\delta y(t)} = \frac{\delta S'}{\delta X'(t)} = \frac{\delta S'}{\delta y'(t)} = 0. \quad (1.12a)$$

При $t = t_f$ функционал (1.11) следует дифференцировать по значениям координат с учетом условий связи

$$X(t_f) = X'(t_f), \quad y(t_f) = y'(t_f), \quad (1.12b)$$

которые возникают из-за δ -функции, присутствующей в интеграле (1.10).

Получим:

$$\dot{X}(t_f) = \dot{X}'(t_f), \quad \dot{y}(t_f) = \dot{y}'(t_f). \quad (1.12c)$$

Условия в асимптотическом прошлом (которые получаются экстремизацией выражения (1.11) по X_i, y_i, X'_i, y'_i) удобно выразить в терминах асимптотических величин. При $t = t_i \rightarrow -\infty$ система находится в асимптотической области $X \rightarrow -\infty$, где влияние потенциального барьера пренебрежимо мало. Используя уравнения движения (1.12a), выпишем асимптотику решения:

$$\begin{aligned} X(t) &\rightarrow X_i + p_i(t - t_i) \\ y(t) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [ae^{-i\omega(t-t_i)} + \bar{a}e^{i\omega(t-t_i)}] \end{aligned} \quad \text{при } t \rightarrow -\infty. \quad (1.12d)$$

Для динамических координат $X'(t), y'(t)$ выполнены такие же асимптотические формулы. В терминах переменных X_i, p_i, a, \bar{a} условия при $t = t_i \rightarrow -\infty$ принимают вид

$$\begin{aligned} p_i &= p'_i = -\frac{X_i - X'_i}{2iT}, \\ a' + \bar{a}' &= ae^{2\omega T + \theta} + \bar{a}e^{-2\omega T - \theta}, \\ a + \bar{a} &= a'e^{-2\omega T - \theta} + \bar{a}'e^{2\omega T + \theta}. \end{aligned} \quad (1.12e)$$

Наконец, условия экстремума функционала (1.11) по лагранжевым множителям T, θ , запишем в виде:

$$\begin{aligned} E &= \frac{p_i^2}{2} + \omega N, \\ N &= a\bar{a}, \end{aligned} \quad (1.12f)$$

где мы использовали условия (1.12e). Уравнения (1.12a) — (1.12f) образуют полную систему условий экстремума функционала F .

Так как динамические координаты $X'(t)$, $y'(t)$ возникли из интегрального представления для комплексно сопряженной амплитуды, будем искать решения вида

$$X'(t) = X^*(t), \quad y'(t) = y^*(t). \quad (1.13)$$

Легко убедиться, что подстановка (1.13) проходит через систему уравнений (1.12) при условии, что значения множителей Лагранжа T , θ действительны. Оставшиеся после подстановки уравнения образуют краевую задачу, которой удовлетворяют динамические координаты $X(t)$, $y(t)$. Удобно поставить эту задачу на контуре $ABCD$ в плоскости комплексного времени, см. рис. 1. [Заметим, что длина евклидовой части AB контура равна параметру T задачи.] Классические уравнения движения

$$\frac{\delta S}{\delta X(t)} = \frac{\delta S}{\delta y(t)} = 0 \quad (1.14a)$$

должны быть выполнены во внутренних точках контура. Краевые условия при $t = t_f \rightarrow +\infty$ (уравнения (1.12b), (1.12c)) приобретают вид условий действительности переменных $X(t)$, $y(t)$ в асимптотической части D контура:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} X(t) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im} y(t) \rightarrow 0 \\ \operatorname{Im} \dot{X}(t) \rightarrow 0 \quad \operatorname{Im} \dot{y}(t) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (1.14b)$$

Условия в асимптотическом прошлом (1.12e) значительно упрощаются, будучи выраженными в терминах временной переменной $t' = t - iT/2$, которая изменяется вдоль действительной оси, в то время как переменная t пробегает часть AB контура. Выпишем асимптотики решения при $t \rightarrow -\infty + iT$:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X_0 + p_0(t' - t_i), \\ y &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[f e^{-i\omega(t'-t_i)} + g^* e^{i\omega(t'-t_i)} \right]. \end{aligned}$$

В терминах переменных X_0 , p_0 , f и g , краевые условия (1.12e) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} X_0 = 0, \quad \operatorname{Im} p_0 = 0, \\ f = e^{-\theta} g. \end{aligned} \quad (1.14c)$$

Наконец, перепишем уравнения (1.12f) в терминах асимптотических переменных в области A контура:

$$\begin{aligned} E &= \frac{p_0^2}{2} + \omega N, \\ N &= \omega f g^*. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Формулы (1.15) позволяют выразить множители Лагранжа T , θ через E , N . На практике удобно поступать наоборот, то есть решать краевую задачу (1.14) для заданных наперед значений переменных T , θ , а затем вычислять значения E , N по уравнениям (1.15).

Условия (1.14b), (1.14c) эквивалентны восьми действительным краевым условиям для комплексифицированных уравнений второго порядка (1.14a). Таким образом, задача (1.14) должна иметь единственное решение¹ (или дискретный набор решений). Мы называем краевую задачу (1.14) « T/θ задачей», ее решения — θ -инстантонами.

Подставляя решение T/θ задачи в выражение (1.11), получим седловое значение функционала F , которое вычисляется по простой формуле:

$$F(E, N) = 2\text{Im}S_0(T, \theta) - 2ET - N\theta, \quad (1.16)$$

где S_0 — проинтегрированное по частям действие модели:

$$S_0 = \int dt \left(-\frac{1}{2}X \frac{d^2 X}{dt^2} - \frac{1}{2}y \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{2}\omega^2 y^2 - U_{\text{int}}(X, y) \right). \quad (1.17)$$

Заметим, что интегрирование в выражении (1.17) идет вдоль контура $ABCD$. Согласно методу перевала, для вероятности (1.4) получаем:

$$\mathcal{P}(E, N) \propto e^{-F(\tilde{E}, \tilde{N})/g^2},$$

где мы восстановили знаки «тильда» над величинами E , N .

¹Заметим, что решение системы уравнений (1.14) определено с точностью до временных сдвигов, см. подробное обсуждение этого вопроса в работах [16, 67]. Для рассматриваемых в диссертации вопросов эта симметрия несущественна.

Отметим, что при выводе выражения (1.16) мы не использовали условия (1.15) экстремума функционала по переменным T, θ . Экстремизация выражения (1.16) приводит к соотношениям

$$E(T, \theta) = \frac{\partial}{\partial T} \text{Im} S_0(T, \theta), \quad (1.18)$$

$$N(T, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} 2 \text{Im} S_0(T, \theta), \quad (1.19)$$

которые эквивалентны равенствам (1.15). Легко вывести формулы обратного преобразования Лежандра:

$$T(E, N) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial E} F(E, N), \quad (1.20)$$

$$\theta(E, N) = -\frac{\partial}{\partial N} F(E, N). \quad (1.21)$$

Наконец, заметим, что начальные условия (1.14с), дополненные условиями связи (1.15), эквивалентны начальным условиям работ [7–9], которые выражены в терминах переменных «действие–угол». Условия в асимптотическом будущем (1.14b) отличаются от условий работ [7–9] из-за суммирования по конечным состояниям в формуле (1.4).

Отметим два нетривиальных свойства решений T/θ задачи. Во-первых условие асимптотической действительности (1.14b) не всегда совпадает с условием действительности при конечных временах. Конечно, в случае, когда решение соответствует движению в асимптотической области $X \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, условие (1.14b) означает, что решение действительно при любых *конечных* действительных t . А именно, в этом случае фаза и амплитуда колебаний свободного осциллятора действительны и X действительно при $t \rightarrow +\infty$. Тогда из уравнений движения следует, что $X(t)$ и $y(t)$ действительны на всей части CD контура. Описанный случай соответствует переходам прямо в асимптотическую область $X \rightarrow +\infty$. Ситуация может существенно отличаться, если при $t \rightarrow +\infty$ система остается в области взаимодействия. К примеру, рассмотрим решение, которое в асимптотическом

будущем приближается к седловой точке потенциала, $X \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Ясно, что при больших t такое решение приближается к точке $(X = 0, y = 0)$ экспоненциально вдоль неустойчивого направления потенциала, т.е. $X(t), y(t) \propto e^{-\text{const} \cdot t}$. Если предэкспоненциальный множитель не является действительным, решение остается комплексным при сколь угодно больших конечных временах, и становится действительным лишь асимптотически при $t \rightarrow +\infty$. Описанное выше решение соответствует переходу на седловую точку потенциального барьера, которую мы, следуя терминологии теории поля, назовем «сфалероном». После этого система скатывается с вероятностью порядка 1 в асимптотическую область $X \rightarrow +\infty$. Как мы увидим в разделе 1.5, процесс такого типа действительно происходит в некоторой области значений энергии и начального числа заполнения осциллятора.

Во-вторых, так как при $t \rightarrow -\infty$ (когда $X \rightarrow -\infty$) потенциал взаимодействия пренебрежимо мал, можно продолжить асимптотики решения на действительную ось. Из уравнений (1.14с) получаем:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (f e^{-\omega T} e^{-i\omega t} + f^* e^{\theta + \omega T} e^{i\omega t}) ,$$

$$\text{Im}X(t) = -T p_0 .$$

Мы видим, что вследствие граничных условий динамические координаты системы комплексны при $t \in \mathbb{R}$, $t \rightarrow -\infty$. Для решений, описывающих прямое туннелирование ($X(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$), это означает, что контур $ABCD$ должен быть отделен от действительной оси точкой ветвления (см. рис. 1, где разрезы показаны двойными линиями), которая не позволяет непрерывно перевести контур в действительную ось. Приведенный аргумент *не применим* к решениям, остающимся в области взаимодействия; в этом случае точка ветвления между контуром $ABCD$ и действительной осью времени может отсутствовать. В разделе 1.5 мы увидим, что так и происходит в некоторой области значений E, N .

1.3 Классические надбарьерные переходы

Рассмотрим классические надбарьерные переходы, которые описываются действительными решениями классических уравнений движения. Классическая эволюция системы определяется четырьмя начальными данными. Одно из них (скажем, начальное положение центра масс системы), используем для фиксации инвариантности относительно временных сдвигов. Выберем в качестве остальных трех данных полную энергию E , число заполнения осциллятора² $N \equiv E_{\text{osc}}/\omega$, и начальную фазу φ .

Квантовое начальное состояние системы полностью определяется полной энергией E и номером уровня осциллятора N , оно может быть представлено точкой на E – N плоскости. Будем говорить, что переходы из состояния (E, N) не подавлены, если существует хотя бы одно классическое решение описывающее надбарьерный переход со значениями E, N , заданными в начале эволюции³. Эти состояния образуют область на E – N плоскости, которую мы найдем в этом разделе.

Ясно, что при фиксированном N всегда возможен классический переход с достаточно большой энергией. С другой стороны, энергия надбарьерного перехода всегда выше, чем высота потенциального барьера. Таким образом, существует функция $E_0(N)$, такая, что классические надбарьерные переходы возможны при $E > E_0$, но не происходят при $E < E_0$ при *любых* значениях начальной фазы φ . Кривая $E_0(N)$ ограничивает область начальных состояний, переходы из которых не подавлены. Мы получили функцию $E_0(N)$ численно, результат⁴ показан на рис. 1.2.

Важная точка границы $E_0(N)$ соответствует неустойчивому статическому решению $X(t) = y(t) = 0$, которое является седловой точкой полного

²В классической механике термин «число заполнения осциллятора» не определен. Мы будем употреблять этот термин, имея в виду величину E_{osc}/ω .

³Заметим, что такие классические решения удовлетворяют краевой задаче (1.14). Как видно из уравнения (1.16), они соответствуют $F = 0$.

⁴Заметим, что линия $E_0(N)$ может быть продолжена в область $N > N_s$. Переходы с $N > N_s$ нас не интересуют.

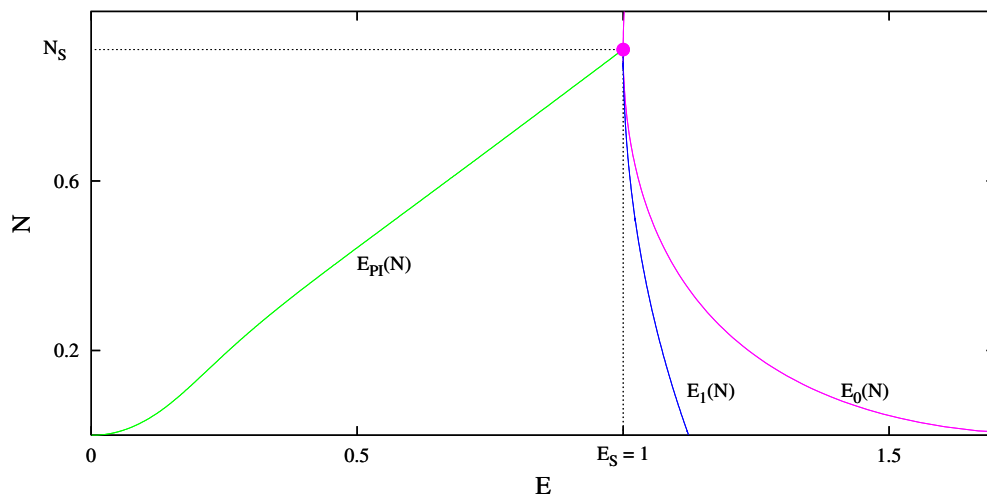


Рис. 1.2. Плоскость начальных состояний для задачи туннелирования связанной системы через потенциальный барьер.

потенциала $U(X, y) \equiv \omega^2 y^2 / 2 + U_{\text{int}}(X, y)$ (см. рис. 1.3). Ниже мы называем это решение «сфалероном». Энергия сфалерона $E_s = U(0, 0) = 1$ совпадает с минимумом функции $E_o(N)$. Действительно, классические переходы при $E < E_s$ невозможны, а надбарьерное решение с энергией, несколько превышающей E_s , получается из решения $X = y = 0$ сообщением небольшого импульса вдоль отрицательной моды сфалерона. Решая задачу Коши вперед и назад во времени, мы получаем решение, описывающее надбарьерный переход системы между областями $X \rightarrow -\infty$ и $X \rightarrow +\infty$, и определенное значение $N = N_s$ в области $X \rightarrow -\infty$ (см. рис. 1.2). Решения, энергия которых приближаются к энергии сфалерона, соответствуют сообщению все меньшего импульса вдоль отрицательной моды сфалерона. Таким образом, они проводят все больше времени в области взаимодействия. В пределе $E \rightarrow E_s$ система проводит бесконечное время в области вблизи сфалерона.

По аналогии со свойствами надбарьерных классических решений вблизи точки (E_s, N_s) , можно ожидать, что при приближении значений E, N к любой точке границы $(E_o(N), N)$, соответствующее надбарьерное решение будет проводить все больше времени в области взаимодействия. Это наблюдение важно для дальнейших рассуждений, обоснуем его. Зафиксируем начальное

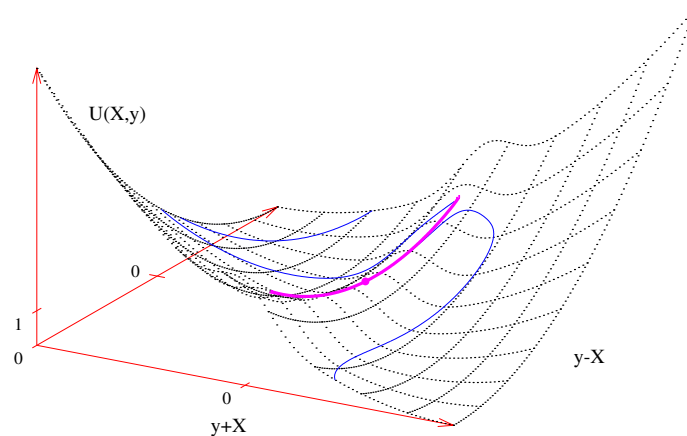


Рис. 1.3. Потенциал (пунктирные линии) в окрестности сфалерона ($X = 0, y = 0$) (жирная точка), возбужденный сфалерон (жирная линия) для $(E, N) = (1.985, 3.72)$, и траектория классического решения, близкого к возбужденному сфалерону (тонкая линия).

и конечные времена, t_i и t_f . Пусть во временном интервале $t_i < t < t_f$ решение с энергией E_1 описывает переход на другую сторону барьера, а решение с энергией $E_2 < E_1$ и тем же значением N отражается назад. Тогда существует промежуточная энергия, при которой соответствующее решение оканчивается в области взаимодействия при $t = t_f$. В пределе $(t_f - t_i) \rightarrow +\infty$ получаем точку границы $E_o(N)$ и соответствующее ей решение, которое стремится к некоторому неустойчивому решению, описывающему финитное движение в области взаимодействия. Мы называем последнее решение «возбужденным сфалероном», так как оно описывает колебания над точкой $X = y = 0$ вдоль стабильного направления потенциала. Таким образом, каждая точка границы $(E_o(N), N)$ соответствует некоторому возбужденному сфалерону. Решения, стремящиеся к возбужденным сфалеронам асимптотически при $t \rightarrow +\infty$, образуют поверхность в фазовом пространстве (сепаратрисы), разделяющую области, в которых движение системы качественно отличается. Пример близкой к возбужденному сфалерону траектории показан на рис. 1.3.

1.4 Туннелирование при низких энергиях

Перейдем к изучению подбарьерных переходов, для этого решим численно T/θ задачу (1.14). Удобно начать с поиска частных решений при $\theta = 0$. Краевые условия (1.14b), (1.14c) в этом случае означают действительность решения в асимптотических прошлом и будущем. Можно показать [73], что физически значимые решения с $\theta = 0$ действительны на всем контуре $ABCD$ (рис. 1). Евклидова часть BC такого решения описывает осцилляции в перевернутом потенциале с периодом $2T$, так что точки B и C соответствуют двум точкам поворота $\dot{X} = \dot{y} = 0$. Описанные евклидовы решения называются периодическими инстантонами; они могут быть получены численно методами минимизации евклидова действия [15, 16]. Полное решение затем восстанавливается путем численного решения задачи Коши вдоль линий CD и BA . Получив решение в асимптотическом прошлом, мы вычисляем энергию и начальный уровень возбуждения осциллятора по формулам (1.15). Так как решения задачи Коши явно действительны, условия (1.14b), (1.14c) выполнены при $\theta = 0$. Линия периодических инстантонов в плоскости $E-N$ показана на рис. 1.2.

Как только решения с $\theta = 0$ найдены, естественно попробовать покрыть решениями всю область начальных состояний $E < E_0(N)$, изменяя значения T и θ небольшими шагами. Решение граничной задачи, соответствующее точке $(T + \Delta T, \theta + \Delta\theta)$, может быть получено с помощью итеративного метода Ньютона–Рафсона, для которого решение, соответствующее точке (T, θ) , служит в качестве начального приближения (см. [15, 16, 67, 77]). Мы ожидаем, что полученное решение является физически значимым, если оно слабо отличается от физически значимого решения, использованного в качестве начального приближения. В частности, ожидается, что полученное решение автоматически оканчивается в правильной асимптотической области $X \rightarrow +\infty$ на каждом шаге. Однако, метод малых деформаций не работает вблизи точек

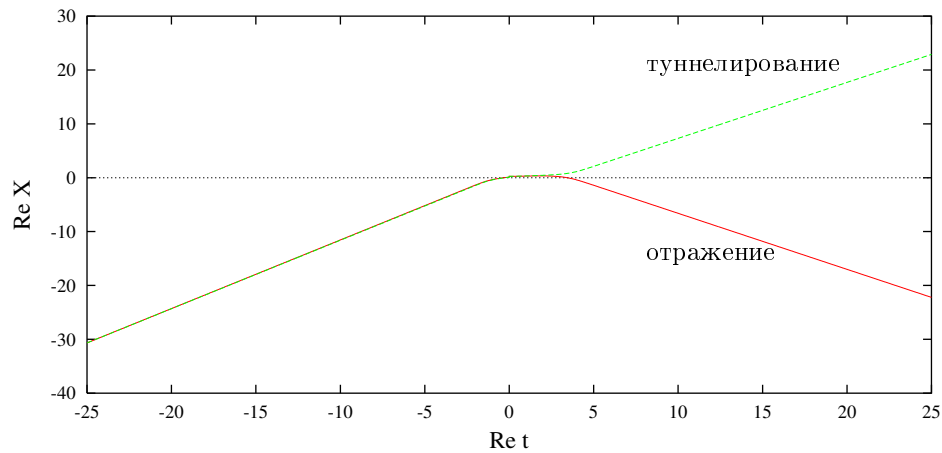


Рис. 1.4. Зависимость туннельной координаты X от времени для двух решений с близкими значениями энергии и начального уровня возбуждения осциллятора. Физически значимое решение описывает туннелирование в асимптотическую область $X \rightarrow +\infty$, а нефизическое — отражается назад в область $X \rightarrow -\infty$. Физическое решение соответствует точке $E = 1.028$, $N = 0.44$, нефизическое — точке $E = 1.034$, $N = 0.44$. Оба решения близки к точке на линии бифуркаций $E_c(N = 0.44) = 1.031$.

бифуркации на $E-N$ плоскости, где физическая ветвь решений встречается с нефизической ветвью. Таким образом, необходимо дополнить метод малых деформаций методом, который помогает находить правильные решения вблизи точек бифуркации.

С помощью метода малых деформаций мы получили правильные решения T/θ задачи в области $E < E_c(N)$, см. рис. 1.2. Однако, при высоких энергиях, $E > E_c(N)$, процедура малых деформаций производит решения, которые отражаются от барьера назад (см. рис. 1.4), т. е. обладают неправильными «топологическими свойствами». Это происходит глубоко внутри области классически запрещенных состояний, переходы из которых экспоненциально подавлены, и, следовательно, должны описываться квазиклассически. Ясно, что решения с неправильной топологией не описывают изучаемые туннельные переходы. Следовательно, в области $E_c(N) < E < E_o(N)$ должна существовать другая, физически значимая ветвь решений. В этом случае линия $E_c(N)$ соответствует бифуркациям, где ветвь физических решений пересекается с ветвью нефизических. Линия бифуркаций $E_c(N)$, найденная численно

для модели (1.3), показана на рис. 1.2.

Изменение топологических свойств квазиклассических решений при энергиях, превышающих некоторое критическое значение, не является специфичной рассматриваемой задачи. Это явление было обнаружено в теоретико-полевых моделях при изучении процессов индуцированного распада ложного вакуума [67] и переходов с изменением топологии в калибровочной теории [77] (в моделях теории поля параметр N соответствует количеству частиц в начальном состоянии). Во всех случаях потеря правильных топологических свойств решений не позволяла вычислить экспоненту подавления вероятности туннелирования в интересной области высоких энергий.

Согласно аргументу раздела 1.3, время, которое туннельные решения проводят в области взаимодействия, стремится к бесконечности⁵ при приближении точки (E, N) к линии бифуркаций $E = E_c(N)$. Таким образом, каждая точка этой линии соответствует решению, которое стремится к одному из возбужденных сфалеронов при $t \rightarrow +\infty$. Как уже отмечалось в разделе 1.2, такое поведение возможно для комплексных начальных данных из-за присутствия неустойчивого направления вблизи (возбужденного) сфалерона.

1.5 Регуляризация туннельных решений

Прейдем к формулировке метода регуляризации, который позволяет найти правильную ветвь решений при $E > E_c(N)$. Как отмечено в работах [71, 72, 79, 85], все физически значимые решения в этой области стремятся к возбужденным сфалеронам при $t \rightarrow +\infty$. Эти решения трудно, если вообще возможно, найти с помощью общих методов решения краевой задачи (1.14), так как они комплексны при конечных временах и становятся действительными только асимптотически при $t \rightarrow +\infty$, в то время как традиционные численные методы применимы только для конечных интервалов.

⁵Отметим, что отмеченные свойства θ -инстантонов подобны свойствам туннельных решений в квантовой механике одной степени свободы, энергия которых близка к высоте барьера, см. Приложение А

Вдобавок, техника регуляризации позволит нам получить семейство надбарьерных решений (раздел 1.7), которое покрывает всю область начальных данных, соответствующих классически разрешенным переходам, включая ее границу $E_o(N)$. Это свойство интересно в теоретико-полевых моделях, где нахождение границы $E_o(N)$ затруднено из-за большой размерности фазового пространства (см., к примеру, обсуждение в работе [96]).

Основная идея метода регуляризации состоит в следующем. Мы добавим к классическим уравнениям движения (1.14а) член, пропорциональный малому параметру ϵ , такой, что траекторий, проводящих бесконечное время в области взаимодействия, среди решений регуляризованной задачи больше не будет. Таким образом, после регуляризации можно будет покрыть решениями всю область начальных данных не пересекая линии бифуркации. В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ мы получим физически значимые решения исходной T/θ задачи.

В этом разделе нам будет удобно работать в терминах функционала F , (выражение (1.11)), условие экстремума которого эквивалентно краевой задаче (1.14). Чтобы предотвратить экстримизацию функционала F конфигурациями, приближающимися к возбужденному сфалерону при $t \rightarrow +\infty$, добавим к нему дополнительный член вида $2\epsilon T_{\text{int}}$, где T_{int} — функционал, оценивающий время, которое решение «проводит» в области взаимодействия. Параметр ϵ исчезающе мал, поэтому любой «регулярный» экстремум функционала F (решение, проводящее конечное время в области $U_{\text{int}} \neq 0$) слабо меняется после регуляризации. В то же время, для любого критического решения мы получаем $T_{\text{int}} = +\infty$, т.е. такие решения соответствуют сингулярностям регуляризованного функционала $F_\epsilon \equiv F + 2\epsilon T_{\text{int}}$, а не точкам экстремума.

Для квантовомеханических задач удобно определить функционал T_{int} следующим образом:

$$T_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left[\int dt U_{\text{int}}(X, y) + \int dt U_{\text{int}}(X^*, y^*) \right]. \quad (1.22)$$

Заметим, что функционал (1.22) действителен, а регуляризация эквивалентна умножению потенциала взаимодействия на комплексный множитель:

$$U_{\text{int}} \rightarrow (1 - i\epsilon)U_{\text{int}} = e^{-i\epsilon}U_{\text{int}} + O(\epsilon^2). \quad (1.23)$$

Таким образом, после регуляризации изменяются лишь классические уравнения движения, в то время как граничные условия (1.14b), (1.14c) остаются теми же самыми. Отметим, что вместо U_{int} в выражении (1.22) можно взять любую функцию, принимающую положительные значения в области взаимодействия и достаточно быстро исчезающую в начальной и в конечной асимптотических областях. Так, в калибровочной теории поля удобен другой выбор [79].

Приведем аргумент в пользу того, что решения регуляризованной T/θ задачи существуют при $\epsilon \neq 0$. Рассмотрим «регуляризованную вероятность перехода»

$$\mathcal{P}_\epsilon = \lim_{t_f - t_i \rightarrow \infty} \sum_f \left| \langle f | e^{(-i\hat{H} - \epsilon\hat{U}_{\text{int}})(t_f - t_i)} | E, N \rangle \right|^2, \quad (1.24)$$

которая соответствует неунитарной эволюции системы в области взаимодействия (ср. (1.4)). Величина (1.24) хорошо определена на квантовом уровне, при $\epsilon \rightarrow 0$ она стремится к вероятности туннелирования (1.4). Седловое значение функционала F_ϵ равно экспоненте подавления для величины \mathcal{P}_ϵ , поэтому следует ожидать, что соответствующая седловая точка существует.

Мы показали, что все решения регуляризованной T/θ задачи должны проводить конечное время в области взаимодействия. По непрерывности, решения регуляризованной задачи, полученные с помощью процедуры малых деформаций из решения с правильной топологией, не отражаются от потенциального барьера. Таким образом, линия $E = E_c(N)$ больше не соответствует бифуркациям решений регуляризованной задачи; теперь мы можем покрыть решениями всю область $E < E_o(N)$. Решения исходной T/θ задачи восстанавливаются в пределе $\epsilon \rightarrow 0$.

Следует отметить, что время взаимодействия T_{int} сопряжено параметру ϵ :

$$T_{\text{int}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} F_{\epsilon}(E, N, \epsilon). \quad (1.25)$$

Это соотношение может быть использовано для проверки численного результата.

Мы получили решения регуляризованной T/θ задачи численно с помощью методов работ [15, 16]. Чтобы получить экспоненту подавления в области $E_c(N) < E < E_o(N)$, мы стартовали с решения, находящегося глубоко в «запрещенной» области начальных данных (т.е. $E < E_c(N)$). Затем мы повышали ϵ от нуля до некоторого малого значения⁶ оставляя T , θ постоянными. Затем, мы изменяли малыми шагами значения параметров T и θ при постоянном ϵ , получая таким образом решения регуляризованной задачи в области $E_c(N) < E < E_o(N)$. Все полученные решения имели правильную топологию, т.е. заканчивались в асимптотической области $X \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Наконец, мы уменьшали ϵ и получали значения F , E , N в пределе $\epsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим решения, получающиеся в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ в области $E_c < E < E_o$. Они принадлежат к новой ветви, поэтому их физические свойства отличаются от свойств решений при низких энергиях. Мы обнаружили, что при уменьшении значения ϵ до нуля решение, соответствующее *любой* точке области $E_1(N) < E < E_0(N)$, проводит все больше времени в области взаимодействия. При $\epsilon = 0$ имеем $T_{\text{int}} = \infty$, что соответствует тому, что правильное квазиклассическое решение стремится к одному из возбужденных сфалеронов при $t \rightarrow +\infty$. Физически это означает, что при достаточно большой энергии (т.е. при $E > E_c(N)$) система туннелирует с образованием состояния, соответствующего возбужденному сфалерону. Чтобы это продемонстрировать явно, мы показали на рис. 1.5 решение $\vec{x}(t) \equiv (X(t), y(t))$, полученное при больших t в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. При построении рисунка 1.5 использовались новые координаты s_+ , s_- , в терминах которых квадратичный

⁶Как правило, использовались значения $\epsilon \sim 10^{-6} \dots 10^{-7}$.

гамильтониан диагонален в окрестности сфалерона $X = y = 0$:

$$H^{(2)} = 1 + \frac{p_+^2}{2} + \frac{p_-^2}{2} + \frac{\omega_+^2}{2}c_+^2 - \frac{\omega_-^2}{2}c_-^2 ,$$

где

$$\omega_{\pm}^2 = \pm\left(-1 + \frac{\omega^2}{2}\right) + \sqrt{1 + \frac{\omega^4}{4}} > 0 .$$

Переменные c_+ , c_- связаны с X , y поворотом:

$$\begin{aligned} X &= \cos \alpha c_+ + \sin \alpha c_- , \\ y &= -\sin \alpha c_+ + \cos \alpha c_- , \\ \operatorname{ctg}(2\alpha) &= -\frac{\omega^2}{2} . \end{aligned}$$

Из рис. 1.5 видно, что при больших временах $\operatorname{Re}c_+$ осциллирует, а неустойчивая координата c_- приближается к своему значению в точке перевала потенциала: $c_- \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Мнимая часть $\operatorname{Im}c_-$ остается ненулевой при конечных временах. Здесь и кроется причина, по которой невозможно обнаружение таких решений с помощью прямых численных методов: физически значимые решения не удовлетворяют условию действительности при сколь угодно больших, но конечных временах.

1.6 Проверка квазиклассического метода сравнением с точным квантовомеханическим результатом

Квантовомеханическая модель (1.3) может быть использована для проверки квазиклассических методов, в частности, метода ϵ -регуляризации. Мы нашли решения полного стационарного уравнения Шредингера и полную вероятность туннелирования $\mathcal{P}(E, N)$, применяя численный метод работ [15, 16]. Вычисления были выполнены при нескольких значениях параметра g , а именно, при $g^2 = 0.01$ – 0.1 . Переходы через потенциальный барьер сильно подавлены при этих значениях параметра g^2 . К примеру, для $g^2 = 0.02$ вероятность

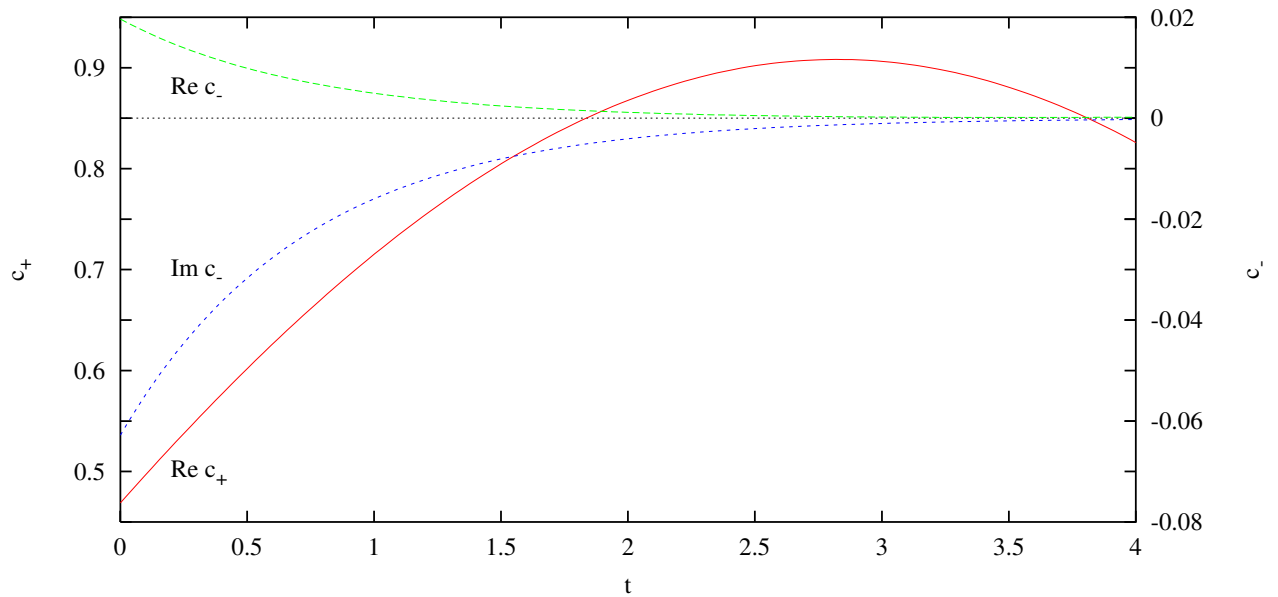


Рис. 1.5. Поведение при больших временах решения, соответствующего $\epsilon = 0$, ($E = 1.05$, $N = 0.43$). Координаты X , y разложены по базису собственных направлений потенциала c^+ , c^- в окрестности сфалерона. Заметим, что $\text{Im}c^+ = 0$.

туннелирования — величина порядка e^{-14} . Чтобы проверить квазиклассический результат с хорошей точностью, мы вычислили «точную экспоненту подавления» $F_{\text{QM}}(g^2) \equiv -g^2 \log \mathcal{P}$ для $g^2 = 0.09, 0.05, 0.03, 0.02$, а затем экстраполировали значение F_{QM} в точку $g^2 = 0$ полиномами третьего и четвертого порядка с точностью 1%. Полученное в результате экстраполяции значение $F_{\text{QM}}(g^2 = 0)$ соответствует бесконечному подавлению, и, таким образом, должно совпадать с правильным квазиклассическим результатом.

Мы провели сравнение в области $E > E_s = 1$, см. рис. 1.6. Результаты, полученные экстраполяцией полного квантовомеханического результата, показаны на рисунке точками. Линии соответствуют значениям квазиклассической экспоненты $F(E, N)$ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Мы видим, что во всей области $E > E_c$ квазиклассический результат совпадает с точным.

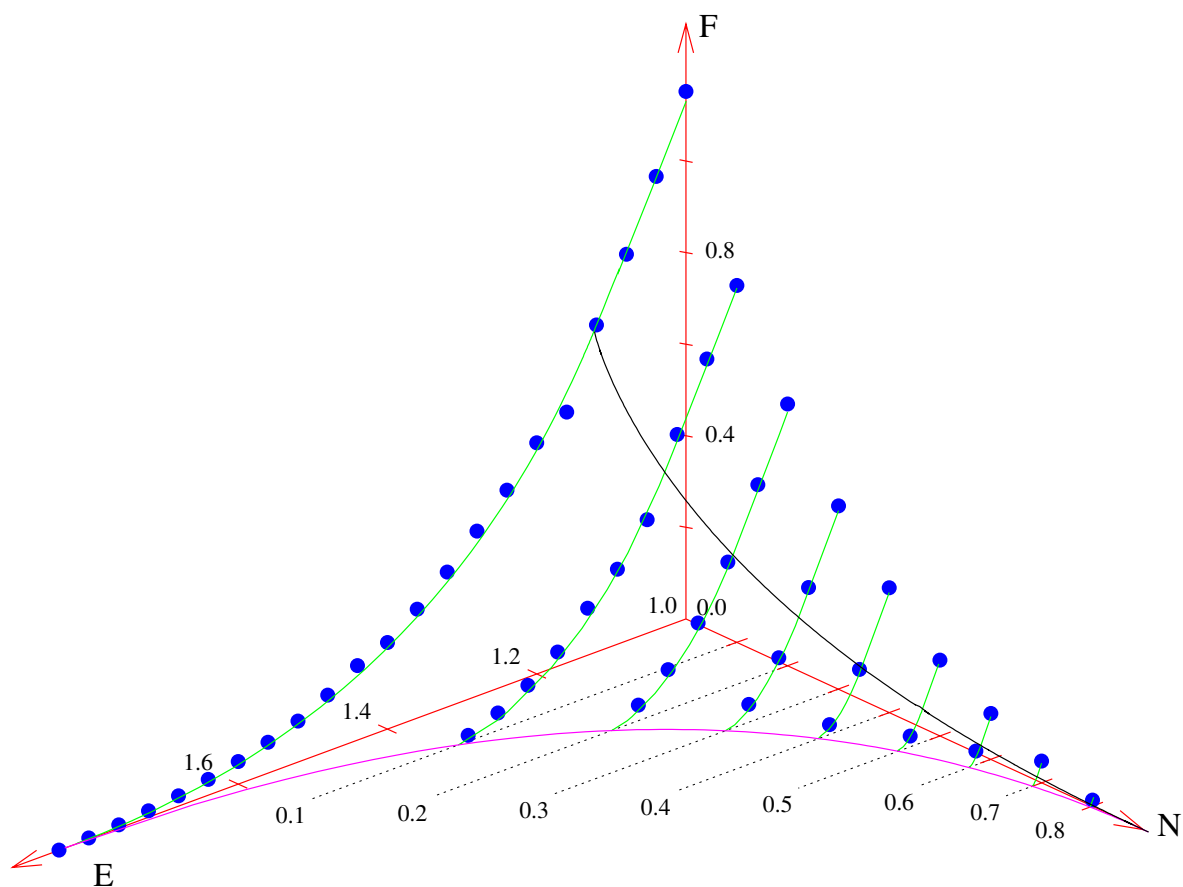
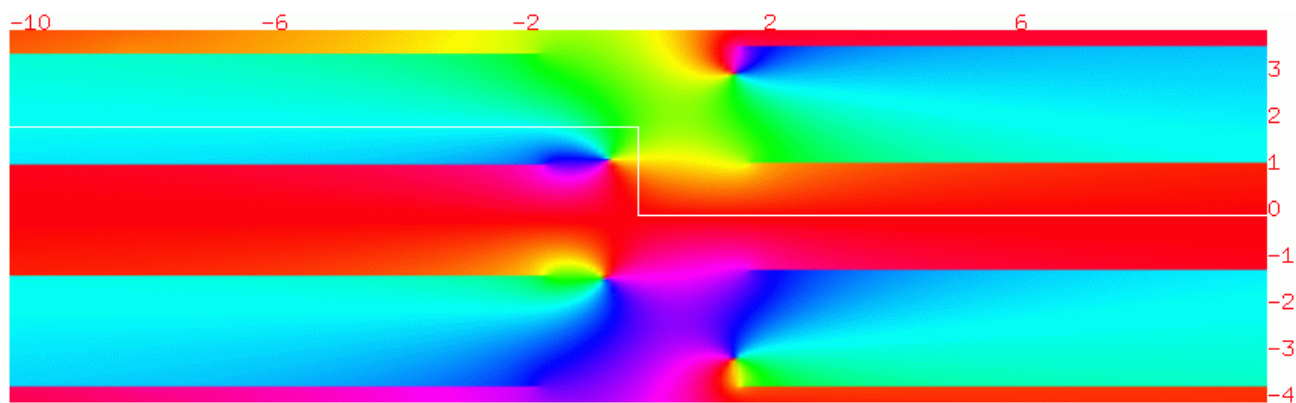
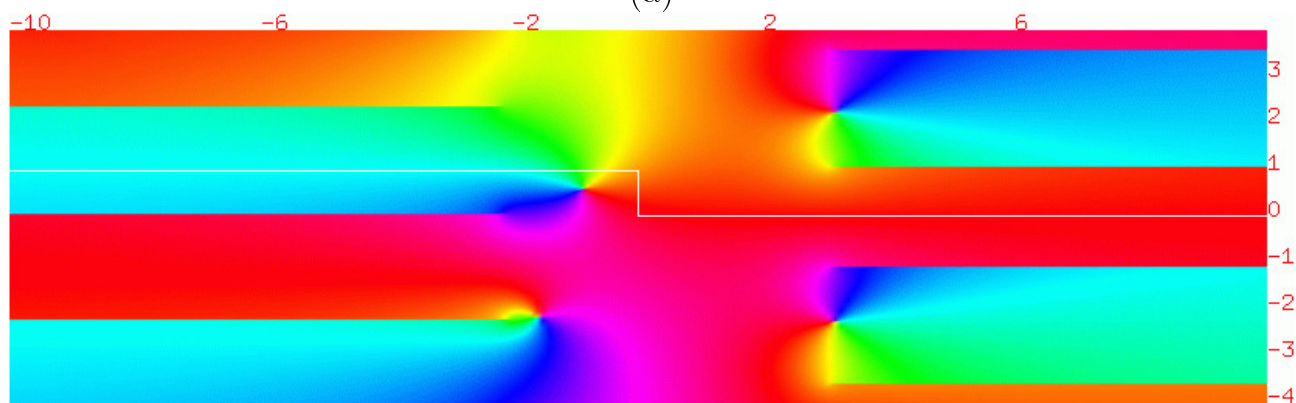


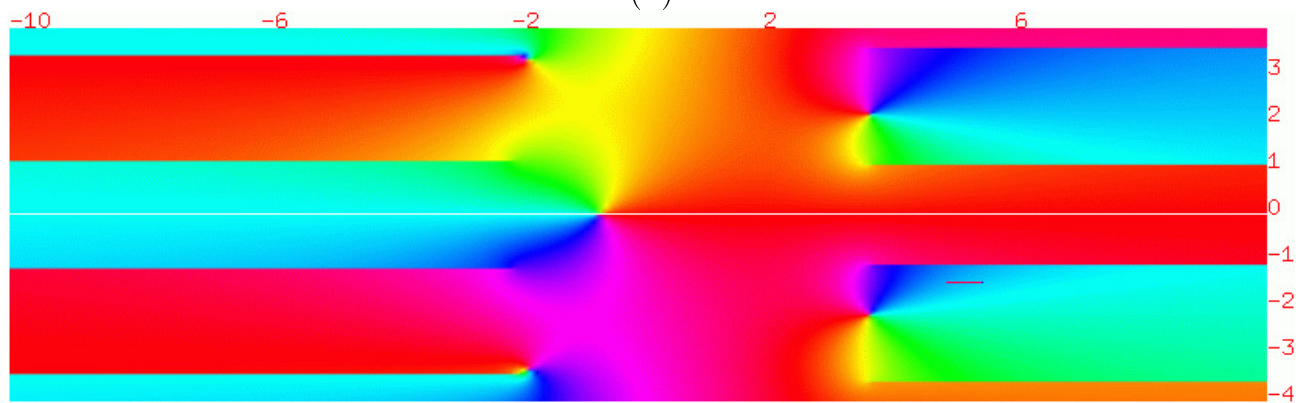
Рис. 1.6. Туннельная экспонента $F(E, N)$ в области $E > E_s = 1$. Линии представляют квазиклассический результат, точки — результат, полученный из численного решения уравнения Шредингера. Поперечные линии соответствуют границам $E_o(N)$, $E_c(N)$.



(a)



(б)



(в)



Рис. 1.7. Фаза туннельной координаты $X(t)$, построенная в плоскости комплексного времени для трех точек кривой $\tau = 190$, $\vartheta = 130$. Точки (а), (б), (в) графика соответствуют $\epsilon = \epsilon_a = 0.01$, $\epsilon = \epsilon_b = 0.0048$ и $\epsilon = \epsilon_b = 0$. Асимптотики $X \rightarrow -\infty$ и $X \rightarrow +\infty$ соответствуют $\arg(X) = \pi$, 0 . Контур $ABCD$ показан белой линией.

1.7 Регуляризация классических надбарьерных решений

Покажем, как с помощью техники регуляризации получить семейство классических надбарьерных решений, которое покрывает всю классически разрешенную область начальных данных, включая окрестность границы $E = E_0(N)$. Результаты этого раздела интересны по двум причинам. Во-первых, они показывают самосогласованность метода: для любой точки плоскости $E-N$, где экспонента подавления (1.16) равна нулю, техника регуляризации позволяет построить классическое надбарьерное решение. Во-вторых, построение границы $E_0(N)$ может быть интересно само по себе. Как показано в разделе 1.3, линию $E_0(N)$ можно получить, рассматривая решения задачи Коши для данных E, N , найденные при всех значениях начальной фазы осциллятора. Однако, для систем с большим числом степеней свободы метод раздела 1.3 непрактичен, так как для построения функции $E_0(N)$ в этом случае следует получить решения для всех точек многомерного пространства начальных данных. В работе [96] разработан вариант метода Монте Карло для решения этой проблемы в контексте теории поля. Ниже изложен альтернативный подход.

Заметим, что классические надбарьерные переходы с заданными энергией и начальным числом заполнения осциллятора удовлетворяют T/θ задаче с $T = \theta = 0$. Без регуляризации мы не можем достичь «классически разрешенную» область плоскости $E-N$, так как для этого необходимо пересечь линию $E_0(N)$, которой соответствуют траектории, стремящиеся к возбужденным сфалеронам при $t \rightarrow +\infty$. Однако, таких траекторий не существует среди решений регуляризованной задачи при конечных значениях ϵ . Таким образом, после регуляризации можно получить решения с $E > E_0(N)$, а затем получить классические надбарьерные решения исходной задачи, устремив специальным образом значения параметров ϵ, T, θ к нулю.

По определению, классически разрешенные переходы соответствуют $F =$

0. Значит, в «разрешенной» области плоскости начальных данных $F_\epsilon(E, N) = \epsilon f(E, N) + O(\epsilon^2)$. Вследствие формул (1.20), (1.21), значения параметров T и θ также должны быть порядка ϵ : $T = \epsilon\tau(E, N)$, $\theta = \epsilon\vartheta(E, N)$, где величины τ и ϑ связаны с энергией и числом заполнения осциллятора следующими соотношениями:

$$\tau = -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_\epsilon}{\partial E} \frac{1}{\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial E} T_{\text{int}}(E, N), \quad (1.26)$$

$$\vartheta = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_\epsilon}{\partial N} \frac{1}{\epsilon} = -2 \frac{\partial}{\partial N} T_{\text{int}}(E, N). \quad (1.27)$$

Таким образом, классические надбарьерные решения получаются в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, при $\tau \equiv T/\epsilon = \text{const}$, $\vartheta \equiv \theta/\epsilon = \text{const}$. Семейство надбарьерных решений параметризуется величинами τ , ϑ .

Решая регуляризованную T/θ задачу, мы получаем единственное решение для данных E , N . С другой стороны, при $\epsilon = 0$ классических надбарьерных решений больше — они образуют семейство, параметризуемое начальной фазой осциллятора φ . Значит, в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ восстанавливается подмножество классических решений, удовлетворяющих дополнительному условию. Чтобы понять, что это за условие, рассмотрим регуляризованный функционал

$$F_\epsilon[q] = F[q] + 2\epsilon T_{\text{int}}[q], \quad (1.28)$$

где q обозначает все переменные, от которых зависит функционал: $\vec{x}(t)$, $\vec{x}'(t)$, T , θ . При $E > E_0(N)$ нерегуляризованный функционал F имеет долину экстремумов $q^e(\varphi)$, соответствующих разным значениям начальной фазы осциллятора φ . При малых ϵ экстремум F_ϵ близок к точке этой долины, соответствующей экстремуму $T_{\text{int}}[q^e(\varphi)]$:

$$\frac{d}{d\varphi} T_{\text{int}}[q^e(\varphi)] = 0. \quad (1.29)$$

Таким образом, решение q_ϵ^e регуляризованной T/θ задачи стремится к надбарьерному классическому решению, полученному экстремизацией T_{int} по начальной фазе осциллятора. Так как $T_{\text{int}}[q^e(\varphi)]$ — положительная функция,

имеющая по крайней мере один минимум, техника регуляризации позволяет найти решение с минимальным T_{int} .

Из приведенных выше рассуждений ясно, что подмножество классических надбарьерных решений, полученных с помощью техники регуляризации, покрывает окрестность границы $E_0(N)$. При приближении точки (E, N) к границе с «классически разрешенной» стороны $E-N$ плоскости, минимальное время, которое решения проводят в области взаимодействия, стремится к бесконечности. Из соотношений (1.26), (1.27) следует, что τ и ϑ стремятся к бесконечности при приближении к границе. Таким образом, чтобы получить точку границы, следует взять дополнительный предел:

$$(E_0(N), N) = \lim_{\substack{\tau/\vartheta=\text{const} \\ \tau \rightarrow +\infty}} (E(\tau, \vartheta), N(\tau, \vartheta)) . \quad (1.30)$$

Разные значения отношения T/θ соответствуют различным точкам линии $E_0(N)$. Соотношение (1.30) позволяет получать функцию $E_0(N)$ не применяя сложных методов Монте Карло.

Мы проверили приведенную выше процедуру численно. Мы убедились, что предел $\epsilon \rightarrow 0$ существует, а значения E, N действительно стремятся к точке на $E-N$ плоскости, соответствующей надбарьерному переходу. На рисунке 1.7 показана фаза туннельной координаты $X(t)$, построенная в плоскости комплексного времени для трех точек (а), (б), (в) кривой $\tau \equiv T/\epsilon = 190, \vartheta \equiv \theta/\epsilon = 130$. Точка (а) лежит глубоко внутри «туннельной» области, $E_a < E_c(N_a)$, точке (в) соответствует решение с $T = 0, \theta = 0, \epsilon = 0$, точка (б) лежит примерно посередине кривой. Точки ветвления решения⁷, разрезы и контур хорошо видны на рисунках.

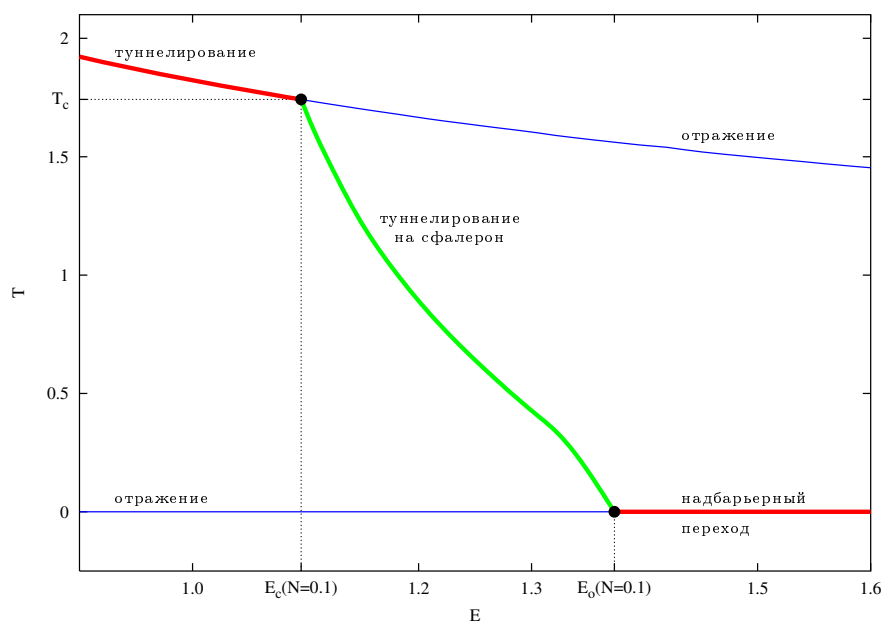
Отметим, что расположенные слева точки ветвления движутся вниз при приближении к нулю параметров T, θ . Левые сингулярности решений, достаточно близких к границе $E_0(N)$, расположены в нижней полуплоскости, см.

⁷Фаза туннельной координаты поворачивается на π при обходе вокруг точки ветвления. Точки, при обходе вокруг которых фаза поворачивается на 2π , соответствуют нулям $X(t)$.

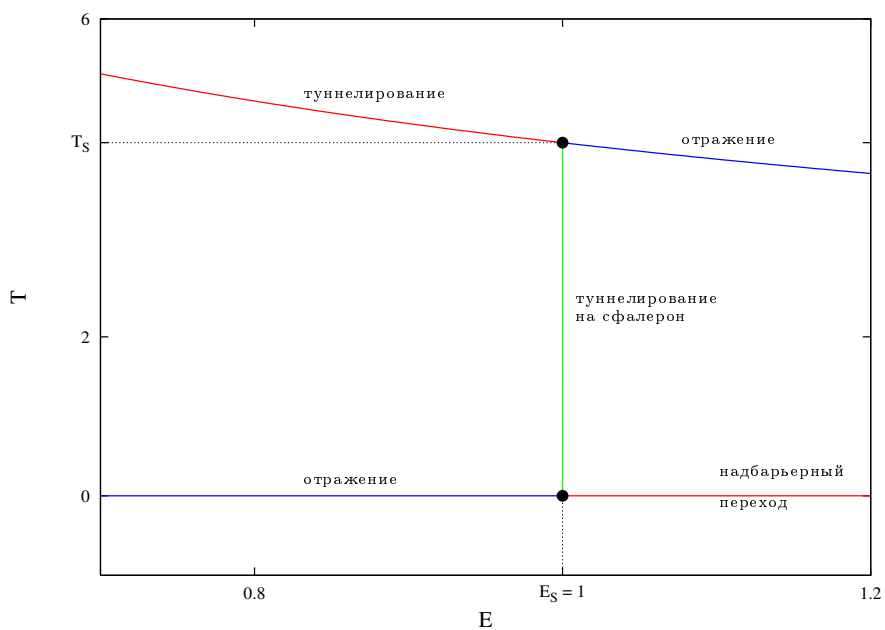
рис. 1.7. Таким образом, соответствующий контур может быть непрерывно переведен в действительную ось без пересечения сингулярностей решения.

Используя регуляризованную T/θ задачу, можно приблизиться к границе $E_o(N)$ с двух сторон. Точки границы могут быть получены из туннельных решений в пределе $T \rightarrow 0$, $T/\theta = \text{const}$, и из классических надбарьерных в пределе $\tau \rightarrow +\infty$, $\tau/\vartheta = \text{const}$. Так как по построению $\tau^* \equiv \tau/\vartheta = T/\theta$, линии $\tau^* = \text{const}$ непрерывны на границе $E_o(N)$, хоть и могут иметь скачок производной.

Суммируя, можно сказать, что решения, описывающие переходы связанной системы через потенциальный барьер, образуют три ветви, которые пересекаются при $E = E_c(N)$, $E = E_o(N)$. Решения, принадлежащие к различным ветвям, соответствуют физически разным механизмам перехода. Решения с $E < E_c(N)$ описывают потенциальное туннелирование; в промежуточной области $E_c(N) < E < E_o(N)$ физически значимые решения соответствуют переходам с образованием возбужденных сфалеронов. Структура ветвей решений показана на рис. 1.6а, где построена зависимость периода $T = -\partial F/\partial(2E)$ от энергии процесса при $N = 0.1$. Нетрудно заметить, что качественная структура ветвей квазиклассических решений в задаче о туннелировании связанной системы похожа на структуру квазиклассических решений, описывающих одномерное туннелирование (см. Приложение А), которая показана на рис. 1.6б. Качественные свойства решений также похожи, хотя решения, описывающие переход на вершину барьера, в одномерном случае вырождены по энергии, и, следовательно, неинтересны.



(а)



(б)

Рис. 1.8. Зависимость параметра $T = -\partial F/\partial(2E)$ от энергии для (а) модели с двумя степенями свободы при $N = 0.1$ и (б) одномерной модели (см. Приложение А). Линии соответствуют разным ветвям решений T/θ задачи. Ветви, подписанные «отражение», оканчиваются с неправильной стороны барьера. На рисунке (б) показана также линия с $\epsilon \neq 0$.

Глава 2

Индукцированное туннелирование в квантовой теории поля при высоких энергиях

2.1 Модель скалярного поля со взаимодействием на границе

В этой главе рассматривается теоретико-полевая модель, для которой можно вычислить экспоненту подавления процесса индуцированного туннелирования при *всех* энергиях столкновения. Модель описывает свободное скалярное поле в $(1 + 1)$ -мерном пространстве-времени на полупрямой $x > 0$. Действие модели имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int dt \int_0^{\infty} dx [(\partial_{\mu}\phi)^2 - m^2\phi^2] - \frac{\mu}{g^2} \int dt [1 - \cos(g\phi(t, 0))]. \quad (2.1)$$

Второй член соответствует локализованному на границе $x = 0$ взаимодействию, характерный энергетический масштаб которого равен μ . Масса m введена в качестве инфракрасного регулятора; предполагается, что ее значение мало по сравнению с масштабом μ . Ниже мы получаем все результаты в пределе $m \rightarrow 0$, так как малая масса оказывается несущественной для квазиклассического вычисления экспоненты подавления при высоких энергиях.

Безмассовая версия модели (2.1) с разными инфракрасными регуляторами рассматривалась и ранее. В физике конденсированного состояния она использовалась для описания движения в квантовых проводках [97] и цепей Джозефсона с дефектами [98]. В работах [99–101] показано, что модель является точно решаемой при специальном значении константы связи $g = \sqrt{2\pi}$. Наконец, в работе [102] утверждается, что модель (2.1) при $m = 0$, рассматриваемая как предел краевой модели «синус–Гордон», интегрируема при любых значениях g .

Модель (2.1) обладает набором статических решений, определяемых значением поля в точке $x = 0$. С точностью до поправок порядка m/μ , форма этих

решений такова: значение поля на границе находится в одном из минимумов краевого потенциала, $\phi_0^{(n)} = 2\pi n/g$, $n = 1, 2, \dots$, а при $x > 0$ поле медленно падает вследствие присутствия ненулевой массы:

$$\phi_{\text{sol}}^{(n)}(x) = \phi_0^{(n)} e^{-mx}.$$

Эти решения локализованы вблизи границы $x = 0$, поэтому естественно называть их «краевыми солитонами». Массы солитонов

$$M^{(n)} = \frac{2\pi^2 n^2}{g^2} m \quad (2.2)$$

относительно невелики, так как они пропорциональны массе поля m .

Далее мы изучаем процесс рождения первого солитона ($\phi_0^{(1)} = 2\pi/g$) при столкновении частицы (или пучка частиц) с границей¹, предполагая, что энергия частицы сильно превышает массу солитона. Для начала, рассмотрим классический аналог этого процесса, т.е. рождение солитона при столкновении с границей классического волнового пакета. Ясно, что классическое рождение происходит только в том случае, когда энергия волнового пакета превышает некоторую пороговую энергию $E_s \gg M^{(1)}$. Действительно, граничное значение $\phi(t, 0)$ классического решения, описывающего рождение солитона, должно меняться от 0 до $2\pi/g$ за время классической эволюции. Значит, в какой-то момент времени должен достигаться максимум краевого потенциала $\phi_0^{(s)} = \pi/g$, поэтому классическая энергия должна превышать высоту потенциала

$$E_s = \frac{2\mu}{g^2}. \quad (2.3)$$

Мы заключаем, что любое состояние, содержащее краевой солитон, отделено от вакуума потенциальным барьером. Нестабильная стационарная конфигурация (сфалерон), соответствующая седловой точке функционала энергии,

¹Если $m = 0$, и модель каким-то образом регуляризована в инфракрасии, пространственно однородные конфигурации $\phi^{(n)}(x) = \phi_0^{(n)}$ являются классическими вакуумами модели. В этом случае наши результаты описывают индуцированные переходы между разными вакуумами.

имеет в нашей модели ту же экспоненциальную форму, что и солитоны:

$$\phi_s = \frac{\pi}{g} e^{-mx} .$$

Энергия сфалерона определяется равенством (2.3), опять с точностью до поправок порядка m/μ .

Мы видим, что процесс рождения солитона при столкновении частицы с пространственной границей классически запрещен, и, следовательно, экспоненциально подавлен при энергиях ниже E_s . Вопрос в том, что происходит при росте энергии. В последующих разделах мы вычисляем вероятность \mathcal{P} рождения солитона при столкновении высокоэнергичной частицы с границей. В главном квазиклассическом приближении эта вероятность имеет экспоненциальную форму (2); далее мы вычисляем главную квазиклассическую экспоненту $F(E/E_s)$. Использование квазиклассического приближения оправдано по следующим соображениям. После замены $\phi \rightarrow \phi/g$ действие (2.1) становится пропорционально $1/g^2$. Таким образом, g^2 играет роль константы Планка, и случай $g \ll 1$ соответствует квазиклассической ситуации.

2.2 T/θ задача

2.2.1 Общая формулировка Приведем общую формулировку квазиклассической краевой задачи, используемой для вычисления вероятности (3) туннелирования из N -частичных состояний. Приведенная ниже задача (см. вывод в работе [66]), похожа на задачу, использованную нами в главе 1. Задача формулируется на контуре $ABCD$ в плоскости комплексного времени (см. рис. 1), во внутренних точках которого выполнены классические уравнения поля:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\phi = 0, \quad x > 0, \quad (2.4a)$$

$$\partial_x \phi = \mu \sin \phi, \quad x = 0. \quad (2.4b)$$

«Продолжительность» T евклидовой эволюции является параметром краевой задачи. Уравнения поля (2.4a), (2.4b) дополнены условиями в асимптотических прошлом и будущем (части A и D контура). А именно, поле $\phi(t, \mathbf{x})$ должно быть действительно при $t \rightarrow +\infty$:

$$\text{Im } \phi \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty . \quad (2.4c)$$

В начале эволюции поле линеаризовано около вакуума $\phi = 0$:

$$\phi(t' + iT, \mathbf{x}) \Big|_{t' \rightarrow -\infty} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left(f_k e^{-i\omega_k t' + ikx} + g_k^* e^{i\omega_k t' - ikx} \right) . \quad (2.4d)$$

Краевое условие в части A контура связывает положительно- и отрицательно- частотные компоненты решения:

$$f_k = e^{-\theta} g_k . \quad (2.4e)$$

Смысл условия (2.4e) состоит в следующем. В пределе $\theta \rightarrow +\infty$ оно совпадает с фейнмановским граничным условием, и, таким образом, соответствует состоянию с квазиклассически малым количеством частиц. Конечное θ соответствует начальному состоянию с ненулевым N , туннелирование из которого происходит с наибольшей вероятностью.

Для любых заданных наперед значений параметров T , θ существует единственное комплексное решение $\phi(t, \mathbf{x}; T, \theta)$, удовлетворяющее уравнениям (2.4a)–(2.4e). Соответствующие ему значения энергии и начального числа частиц вычисляются по знакомым формулам:

$$E = \int dk \omega_k f_k g_k^* , \quad (2.5a)$$

$$N = \int dk f_k g_k^* . \quad (2.5b)$$

Величины E и N могут также быть получены альтернативным методом, с помощью дифференцирования по параметрам T и θ :

$$E = \frac{\partial}{\partial T} \text{Im} S(T, \theta) , \quad N = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Im} S(T, \theta) , \quad (2.6)$$

где

$$S = \frac{1}{2} \int dt \int_0^\infty dx [-\phi \partial_0^2 \phi - (\partial_x \phi)^2 - m^2 \phi^2] - \mu \int dt (1 - \cos \phi(t, 0)) \quad (2.7)$$

обозначает действие модели², проинтегрированное по частям и вычисленное вдоль контура $ABCD$. Экспонента подавления процесса связана с действием формулой:

$$F(E, N) = 2\text{Im}S - N\theta - 2ET. \quad (2.8)$$

Ниже мы называем задачу (2.4) « T/θ задачей», а ее физически значимые решения — « θ -инстантонами».

Свойства решений квазиклассической краевой задачи, отмеченные в разделе 1.2, наблюдаются и в полевых моделях. В частности, не все решения задачи (2.4) интерполируют между состояниями, являющимися пертурбативными возбуждениями над вакуумом и солитоном. В следующем разделе мы перечислим дополнительные требования, которые позволят выделить физически значимые решения.

Отметим также, что решение $\phi(t, x)$ можно продолжить аналитически в плоскость комплексного времени, и деформировать таким образом контур $ABCD$, не изменяя значения интеграла (2.8) для экспоненты подавления. При деформации контура, однако, следует избегать пересечения сингулярностей решения, которые показаны двойными линиями на рис. 1. Ниже нам будет удобно не фиксировать форму контура. Вместо этого, мы ищем решение $\phi(t, x)$, удовлетворяющее уравнениям (2.4а), (2.4б) во всей плоскости комплексного времени, с условиями (2.4с) и (2.4е), наложенными в асимптотических областях A и D плоскости. При использовании такого подхода, однако, следует убедиться в том, что асимптотические области A и D могут быть соединены контуром, не пересекающим сингулярностей решения.

Наконец, обсудим частные случаи краевой задачи (2.4). Случай $\theta = 0$ соответствует решениям, периодичным в евклидовом времени. Такие решения

²Здесь и далее мы используем перемештанное действие, которое не зависит явно от константы связи g .

называются «периодическими инстантонами», мы встречались с ними в разделе 1.4. В главе 3 мы находим решения, соответствующие $T = 0$. Насколько нам известно, такие решения еще не рассматривались. Мы называем их «инстантонами действительного времени», так как контур $ABCD$ не содержит евклидовой части в этом случае.

2.2.2 Использование особенностей модели Перепишем общую T/θ задачу (2.4) в виде, удобном для поиска решений в модели (2.1). Ключевым наблюдением здесь является то, что характерная частота изменения искомым решений — величина порядка $\mu \gg m$. Таким образом, членом $m^2\phi$ в уравнении (2.4а) можно пренебречь, общее решение этого уравнения запишем в виде:

$$\phi(t, x) = \phi_i(t + x) + \phi_f(t - x), \quad (2.9)$$

где ϕ_i и ϕ_f — налетающий и вылетающий волновые пакеты. Они связаны краевым уравнением (2.4b):

$$\phi'_i(z) - \phi'_f(z) = \mu \sin(\phi_i(z) + \phi_f(z)), \quad (2.10)$$

где мы заменили t комплексной переменной z . Естественно рассматривать ϕ_i , ϕ_f как аналитические функции z , и переформулировать оставшиеся уравнения, (2.4с) и (2.4е), в плоскости комплексного z .

Рассмотрим асимптотическое будущее, $t \rightarrow +\infty$ (область D на рис. 1). В этом случае поле $\phi(t, x)$ представлено вылетающим волновым пакетом $\phi_f(t - x)$, аргумент $z = t - x$ которого пробегает действительную ось при изменении x от 0 до $+\infty$. Поэтому условие (2.4с) может быть переписано в виде

$$\text{Im } \phi_f(z) = 0, \quad \text{когда } z \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

С другой стороны, в асимптотическом прошлом $t \rightarrow -\infty + iT$ (область A рисунка) решение представлено налетающей волной $\phi_i(t + x)$. В этом случае аргумент функции $\phi_i(z)$ бежит вдоль линии $\text{Im } z = T$ при $x \in [0, +\infty)$. Таким

образом, условие (2.4e) должно быть сформулировано в терминах функции ϕ_i . А именно, воспользуемся представлением Фурье для функции ϕ_i вдоль линии $\text{Im } z = T$:

$$\phi_i(z) = \int dk \phi_i(k) e^{ik(z-iT)} = \int_{k>0} dk \left\{ \phi_i(k) e^{ik(z-iT)} + \phi_i(-k) e^{-ik(z-iT)} \right\}. \quad (2.12)$$

Сравнивая выражения (2.12) и (2.4d) и учитывая, что для налетающей волны $z = t' + iT + x$, заключаем, что положительно- и отрицательно- частотные амплитуды f_{-k} и g_{-k}^* пропорциональны $\phi_i(-k)$ и $\phi_i(k)$, $k > 0$ соответственно. Условие (2.4e) принимает вид

$$\phi_i(-k) = e^{-\theta} [\phi_i(k)]^*, \quad k > 0.$$

Следовательно, функция ϕ_i представима в виде

$$\phi_i(z) = \chi(z - iT) + e^{-\theta} [\chi(z^* + iT)]^*, \quad (2.13)$$

где функция

$$\chi(z) = \int_0^\infty dk \phi_i(k) e^{ikz} \quad (2.14)$$

регулярна в верхней полуплоскости своего комплексного аргумента. Условие (2.13) представляет собой альтернативную формулировку краевого условия (2.4e).

Заметим, что так как начальное число частиц — конечная величина, налетающий волновой пакет должен быть локализован в пространстве. Поэтому

$$\phi_i(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \pm\infty + iT. \quad (2.15)$$

[Условие (2.15) нарушается в случае периодических инстантонов, см. раздел 2.3.] Мы заключаем, что T/θ задача представлена уравнениями (2.10), (2.11), (2.13), которые формулируются в плоскости комплексного z .

Чтобы убедиться в том, что решение приведенной выше задачи действительно описывает рождение краевого солитона, следует проверить, что значение, принимаемое полем на границе $x = 0$, имеет правильные асимптотики

в начале и в конце процесса. А именно, в случае прямого туннелирования в солитонный сектор $\phi(t, 0)$ должно меняться от 0 до 2π когда t пробегает контур $ABCD$. В разделе 2.5 мы исследуем конфигурации, описывающие рождение сфалерона при $t \rightarrow +\infty$. В этом случае $\phi(t, 0)$ изменяется от 0 до π . Таким образом, получаем следующие условия:

$$\phi_i(z) + \phi_f(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty + iT, \quad (2.16a)$$

$$\phi_i(z) + \phi_f(z) \rightarrow 2\pi \text{ или } \pi \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (2.16b)$$

Наконец, займемся вопросом существования временного контура, соединяющего асимптотические области A и D (см. рис. 1). Заметим, что любая сингулярность z_i^s функции $\phi_i(z)$ соответствует целой полупрямой сингулярностей $t^s = z_i^s - x$ в плоскости комплексного времени, проведенной влево от точки z_i^s параллельно действительной оси, см. рис. 1. Таким образом, контур в комплексном времени должен проходить справа от всех сингулярностей функции $\phi_i(t + x)$ из полосы $\text{Im}t \in [0, T]$. Рассуждая аналогично, мы заключаем, что все сингулярности функции $\phi_f(t - x)$ в этой полосе должны располагаться справа от контура. Ясно, что удовлетворяющий перечисленным условиям контур всегда может быть найден, если, конечно, сингулярности функций $\phi_i(t + x)$ и $\phi_f(t - x)$ не совпадают. В терминах переменной z это означает, что сингулярности начального и конечного волновых пакетов $\phi_i(z)$ и $\phi_f(z)$ должны быть расположены в разных точках. Заметим, что это условие нетривиально, так как функции ϕ_i и ϕ_f связаны дифференциальным уравнением (2.10).

Запишем формулу (2.7) для действия в терминах волновых пакетов:

$$S = \int_{\mathcal{C}} dz \left\{ \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_f)(\phi_i' - \phi_f') - \mu(1 - \cos(\phi_i + \phi_f)) \right\}. \quad (2.17)$$

Здесь контур \mathcal{C} должен соединять асимптотические области $z \rightarrow -\infty + iT$ и $z \rightarrow +\infty$, так, что все сингулярности функций ϕ_i и ϕ_f в полосе $\text{Im}z \in [0, T]$ должны быть расположены слева и справа от него соответственно.

2.3 Периодические инстантоны

В этом разделе мы рассматриваем периодические инстантоны — решения краевой задачи (2.4) при $\theta = 0$. Замечательно, что в модели (2.1) периодические инстантоны могут быть найдены точно.

Отметим, что существует решение полевого уравнения (2.10), которое можно было бы назвать инстантоном:

$$\phi_i = i \ln \left[\frac{\mu}{2} \left(z + \frac{1}{\mu} \right) \right], \quad \phi_f = -i \ln \left[\frac{\mu}{2} \left(z - \frac{1}{\mu} \right) \right]. \quad (2.18)$$

Соответствующая полевая конфигурация ϕ (см. уравнение (2.9)) действительна на евклидовой оси времени $t = -i\tau$ и стремится к $0, 2\pi$ при $\tau \rightarrow -\infty, \tau \rightarrow +\infty$. Таким образом, свойства конфигурации (2.18) совпадают с теми, которые ожидаются от инстантона, описывающего туннелирование между разными вакуумами. Однако, евклидово действие решения (2.18) расходится логарифмически, и мы приходим к выводу, что туннелирование при нулевой энергии в модели (2.1) отсутствует. Конфигурация, полученная изменением общего знака решения (2.18), также является решением уравнений поля. Мы называем ее антиинстантоном.

Точный периодический инстантон в нашей модели может быть получен с помощью подстановки, использовавшейся ранее для приближения решений в области низких энергий [66, 73, 74]. Рассмотрим периодическую цепочку чередующихся инстантонов и антиинстантонов³:

$$\phi_i = \frac{3\pi}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(i \ln \left[\frac{\mu}{2} \left(z + x_0 - i\frac{T}{2} - i2Tn \right) \right] - i \ln \left[\frac{\mu}{2} \left(z + x_0 + i\frac{T}{2} - i2Tn \right) \right] \right), \quad (2.19a)$$

$$\phi_f = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-i \ln \left[\frac{\mu}{2} \left(z - x_0 - i\frac{T}{2} - i2Tn \right) \right] + i \ln \left[\frac{\mu}{2} \left(z - x_0 + i\frac{T}{2} - i2Tn \right) \right] \right). \quad (2.19b)$$

³Константы $3\pi/2$ и $\pi/2$ в добавлены в цепочку (2.19) для удобства.

Легко проверить, что функции ϕ_i , ϕ_f , представленные выражениями (2.19), действительны вдоль прямых $\text{Im}z = 0$, $\text{Im}z = T$, так что условия (2.11), (2.13) выполнены при $\theta = 0$. Заметим, что (анти)инстантоны в цепочке (2.19) модифицированы с помощью действительного параметра x_0 , который будет определен из уравнения (2.10). Используя формулу разложения гиперболического синуса в бесконечное произведение (см., к примеру [103], формула 1.431.2), выполним суммирование в уравнении (2.19):

$$\begin{aligned}\phi_i &= \frac{3\pi}{2} + i \ln \left(\frac{\text{sh} \left(\frac{\pi(z+x_0)}{2T} - i\frac{\pi}{4} \right)}{\text{sh} \left(\frac{\pi(z+x_0)}{2T} + i\frac{\pi}{4} \right)} \right), \\ \phi_f &= \frac{\pi}{2} - i \ln \left(\frac{\text{sh} \left(\frac{\pi(z-x_0)}{2T} - i\frac{\pi}{4} \right)}{\text{sh} \left(\frac{\pi(z-x_0)}{2T} + i\frac{\pi}{4} \right)} \right).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Легко убедиться, что подстановка (2.20) проходит через уравнение (2.10), если x_0 удовлетворяет соотношению

$$\frac{\mu T}{\pi} \tanh \left(\frac{\pi x_0}{T} \right) = 1.$$

Вычислим мнимую часть действия, выбрав предварительно контур интегрирования в выражении (2.17) так, как указано в разделе 2.2.2:

$$2\text{Im}S = 4\pi \ln \frac{\mu T}{\pi} + 4\pi.$$

Найдем энергию и экспоненту подавления в случае периодических инстантонов, используя формулы (2.6), (2.8):

$$E = \frac{2\pi}{T},\tag{2.21}$$

$$F = 4\pi \ln \left(\frac{2\mu}{E} \right).\tag{2.22}$$

В соответствии с обсуждением в начале раздела, экспонента подавления равна бесконечности при нулевой энергии. Как можно ожидать, она исчезает при $E = E_s \equiv 2\mu$.

Рассмотрим подробнее структуру начального и конечного состояний процесса, описываемого периодическими инстантонами. В асимптотическом прошлом ($t = iT + t'$, $t' \rightarrow -\infty$) имеем:

$$\phi(t', x) = \pi + \phi_i(iT + t' + x) = 2 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{\pi(t' + x + x_0)}{T} \right) \right]. \quad (2.23)$$

Этот волновой пакет имеет форму решения в виде «кинка» в теории с потенциалом $V \propto \cos(2\phi)$. В то же время, вылетающая волна ($t \rightarrow +\infty$ вдоль действительной оси) имеет форму «антикинка»:

$$\phi(t, x) = \phi_f(t - x) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{\pi(t - x - x_0)}{T} \right) \right].$$

Рассеяние волновых пакетов такой формы в безмассовой версии модели (2.1) рассматривалось в работе [102], где было получено точное выражение для амплитуды процесса. Полученная нами формула (2.22) совпадает с результатом работы [102] в пределе слабой связи.

Наконец, отметим, что в строго безмассовом случае начальное и конечное числа частиц процесса, описываемого периодическим инстантоном, бесконечно велики, так как соответствующая полевая конфигурация имеет ненулевые асимптотики на пространственной бесконечности: $\phi(t, x \rightarrow +\infty) = \pi$. Как показано в приложении В, введение ненулевой массы регуляризует эту расходимость, и асимптотики решения приобретают вид $\phi(t, x \rightarrow +\infty) = 0$. Поправки к формуле (2.22) малы при $E \gg m$.

2.4 Прямое туннелирование при низких энергиях

2.4.1 Решения при произвольных θ Перейдем к решениям с $\theta \neq 0$. Сделаем следующее наблюдение: если ϕ_i действительна на действительной оси, функция ϕ_f , полученная из уравнения (2.10) с действительным начальным условием, автоматически действительна при $z \in \mathbb{R}$. Таким образом, достаточно найти подстановку для функции ϕ_i , удовлетворяющую условию (2.13), и действительную на действительной оси. Построим требуемую

подстановку как обобщение выражения (2.19а):

$$\phi_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\theta|n|} \left(i \ln \left[\frac{\mu}{2} (z + x_0 - iT_0 - i2Tn) \right] - \right. \\ \left. - i \ln \left[\frac{\mu}{2} (z + x_0 + iT_0 - i2Tn) \right] \right), \quad (2.24)$$

где x_0, T_0 — действительные параметры, $0 < T_0 < T$. Легко проверить, что функция ϕ_i , определенная из выражения (2.24), может быть представлена в виде (2.13).

Покажем, что после наложения дополнительного условия действительности ϕ_i при $z \in \mathbb{R}$, любое решение краевой задачи (2.4) может быть записано в виде (2.24). Функция ϕ_f должна быть аналитична в особых точках функции ϕ_i , расположенных в полосе $0 < \text{Im}z < T$, поэтому ϕ_i может иметь только логарифмические особенности в этой полосе (доказательство последнего утверждения приведено в подразделе 2.5.1). Тогда условие действительности на действительной оси и θ -условие (2.13) позволяют однозначно определить все остальные сингулярности функции ϕ_i . А именно, вследствие равенства (2.13), любая сингулярность функции ϕ_i вида

$$C \ln(z - z_s),$$

находящаяся ниже прямой $\text{Im}z = T$, сопровождается сингулярностью

$$e^{-\theta} C^* \ln(z - 2Ti - z_s^*),$$

расположенной симметрично относительно этой прямой. В то же время, действительность на действительной оси говорит о том, что все сингулярности функции ϕ_i возникают «комплексно сопряженными» парами, расположенными в комплексно сопряженных точках. Эти два условия достаточны для восстановления всей цепочки (2.24), стартуя с логарифмической сингулярности в полосе $0 < \text{Im}z < T$.

От параметра x_0 в выражении (2.24) можно избавиться сдвигом переменной z , поэтому без потери общности положим $x_0 = 0$. Чтобы определить

оставшуюся константу T_0 , рассмотрим уравнение (2.10) в окрестности точки $z = iT_0$. Функция ϕ_i представима в виде

$$\phi_i = i \ln \left[\frac{\mu}{2}(z - iT_0) \right] + R_i(z) , \quad (2.25)$$

где $R_i(z)$ регулярна в точке $z = iT_0$. Степенное разложение левой и правой частей уравнения (2.10) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{i}{z - iT_0} + R'_i(iT_0) - \phi'_f(iT_0) + O(z - iT_0) \\ = -ie^{i(R_i(iT_0) + \phi_f(iT_0))} \left[\frac{1}{z - iT_0} + iR'_i(iT_0) + i\phi'_f(iT_0) \right] + O(z - iT_0) . \end{aligned}$$

Из двух первых членов разложения получаем:

$$e^{i(R_i(iT_0) + \phi_f(iT_0))} = -1 , \quad (2.26)$$

$$R'_i(iT_0) = 0 . \quad (2.27)$$

Выясним смысл полученных формул. Для заданной наперед $R_i(z)$ уравнение (2.10) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию ϕ_f . Можно было бы ожидать, что все коэффициенты ряда Тейлора для ϕ_f определятся однозначно после задания константы интегрирования $\phi_f(iT_0)$. Однако, вследствие того, что $z = iT_0$ является сингулярной точкой уравнения (2.10), ситуация оказывается другой. Значение $\phi_f(iT_0)$ фиксируется из требования регулярности функции ϕ_f в точке $z = iT_0$ (равенство (2.26)), а роль константы интегрирования выполняет $\phi'_f(iT_0)$; кроме того, возникает связь (2.27) на функцию R_i . Эта связь позволяет определить параметр T_0 :

$$T_0 = T\alpha(\theta) , \quad (2.28)$$

где функция $\alpha(\theta)$ неявно задана уравнением

$$2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta n}}{n^2 - \alpha^2} = 1 . \quad (2.29)$$

Последнее соотношение может быть записано в удобной интегральной форме⁴:

$$2\alpha \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\alpha y)}{e^{y+\theta} - 1} dy = 1. \quad (2.30)$$

Теперь функция ϕ_i найдена полностью, а ϕ_f может быть получена из уравнения (2.10) численно. Мы займемся определением функции ϕ_f в конце раздела.

Вычислим мнимую часть действия на туннельном решении. Оказывается, что детальное знание функции ϕ_f для этого не требуется. Из-за действительности функций ϕ_i , ϕ_f на действительной оси комплексно сопряженное действие S^* вычисляется как интеграл от того же выражения, как и в формуле (2.17), но по комплексно сопряженному контуру \mathcal{C}^* . Таким образом,

$$2\text{Im}S = -i(S - S^*) = -i \left(\int_{\mathcal{C}} \mathcal{L} dz - \int_{\mathcal{C}^*} \mathcal{L} dz \right) = -i \oint_{\mathcal{C}_o} \mathcal{L} dz. \quad (2.31)$$

В последнем выражении сумма контуров \mathcal{C} и \mathcal{C}^* стянута в контур \mathcal{C}_o , который охватывает сингулярности⁵ $z = \pm iT_0$ функции ϕ_i . Интеграл (2.31) теперь может быть вычислен явно:

$$2\text{Im}S = 4\pi \text{Im}\phi_f(iT_0) + 4\pi.$$

Используя соотношение (2.26), выразим $\phi_f(iT_0)$ через величину $R_i(iT_0)$, которую в свою очередь определим из выражения (2.24). Результат запишем в виде

$$2\text{Im}S = 4\pi \ln(\mu T \alpha) + 4\pi - 16\pi \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2\left(\frac{\alpha y}{2}\right) dy}{e^{y+\theta} - 1} \frac{1}{y}, \quad (2.32)$$

где полученный из (2.24) ряд представлен в интегральном виде. Энергия и начальное число частиц вычисляются по формулам (2.6). При этом, для энергии получаем ту же формулу (2.21), как и в случае периодических инстантонов.

Число частиц равно

$$N = 4\pi \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2\left(\frac{y\alpha(\theta)}{2}\right) dy}{\text{sh}^2\left(\frac{y+\theta}{2}\right) y}.$$

⁴Легко заметить, что сумма $I(\alpha, \theta)$ в формуле (2.29) удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{d^2 I}{d\theta^2} = \alpha^2 I + \frac{1}{e^\theta - 1}$. Решая это уравнение с соответствующими граничными условиями, получаем (2.30).

⁵Согласно обсуждению подраздела (2.2.2), контур не пересекает сингулярности функции ϕ_f в процессе деформации.

Обсудим наиболее интересный случай $\theta \rightarrow +\infty$. Получим:

$$\alpha = 1 - e^{-\theta} , \quad (2.33)$$

$$N = 4\pi\theta e^{-\theta} , \quad \theta \rightarrow +\infty . \quad (2.34)$$

Как и ожидалось, предел больших θ соответствует туннелированию, индуцированному квазиклассически малым числом налетающих частиц. Для предельного значения экспоненты подавления получаем простую формулу:

$$F|_{N=0} = 4\pi \ln \left[\frac{2\pi\mu}{E} \right] . \quad (2.35)$$

Выражение (2.35) воспроизводит приведенный во Введении результат для области I рисунка 2.

Точный результат (2.35) может привести к ошибочному заключению, что подавление процесса индуцированного туннелирования исчезает, как только энергия достигает значения $2\pi\mu$. На самом деле это не так, т.к. формула (2.35) неприменима при энергиях, превышающих некоторую критическую энергию $E_c < 2\pi\mu$. Причина в том, что при $E > E_c$ не существует решений $\phi_f(z)$ уравнения (2.10), обладающих требуемыми свойствами.

Анализ решений уравнения (2.10) проведем в случае $\theta = +\infty$. Согласно уравнению (2.33), логарифмическая сингулярность функции ϕ_i садится на прямую $\text{Im}z = T$ в этом случае⁶, и подстановка (2.24) принимает простой вид:

$$\phi_i = i \ln \frac{z - iT}{z + iT} .$$

Удобно рассматривать уравнение (2.10) на действительной оси. Производя замену переменных $u = \phi_i + \phi_f$, $\zeta = z/T$, перепишем уравнение (2.10) в виде

$$\frac{du}{d\zeta} = -\lambda \sin u - \frac{4}{\zeta^2 + 1} , \quad (2.36)$$

⁶Это свойство является общим для решений T/θ задачи: из уравнений (2.5) следует, что если уменьшить до нуля количество частиц в начальном состоянии, оставляя конечной его энергию, соответствующие квазиклассические конфигурации станут сингулярными в начальной части контура $ABCD$ на рисунке 1. Мы решаем эту проблему, рассматривая решения во всей комплексной плоскости.

где $\lambda = \mu T$. В новых терминах требование (2.16) того, что найденное решение описывает процесс рождения солитона, соответствуют следующим граничным условиям на функцию u вдоль действительной оси:

$$u \rightarrow 2\pi, \quad \text{при } \zeta \rightarrow -\infty, \quad (2.37a)$$

$$u \rightarrow 2\pi \quad \text{или} \quad \pi, \quad \text{при } \zeta \rightarrow +\infty, \quad (2.37b)$$

где условие (2.37a) следует из уравнения (2.16a) если принять во внимание, что асимптотическая область $z \rightarrow -\infty + iT$ отделена от действительной оси логарифмическим разрезом функции ϕ_i . Условие (2.37a) позволяет найти решение уравнения (2.36) однозначно. Поставим вопрос, всегда ли решение удовлетворяет граничному условию (2.37b). Мы исследовали этот вопрос и численно, и аналитически. [Аналитические аргументы приведены в следующем подразделе.] Рассматривая численные решения (см. рис. 2.1), мы пришли к выводу, что существует критическое значение $\lambda = \lambda_c$, которое разделяет области значений параметра λ , где решения уравнения (2.36) обладают качественно разными свойствами. А именно, при $\lambda > \lambda_c$ решение уравнений (2.36), (2.37a) удовлетворяет правильным асимптотическим условиям (2.37b), так что найденное решение действительно описывает рождение солитона. С другой стороны, в области $\lambda < \lambda_c$ асимптотики функции u при $\zeta \rightarrow +\infty$ изменяются, и мы получаем: $u \rightarrow 0, \zeta \rightarrow +\infty$. Так как функция $u(\zeta)$ принимает значение, равное величине поля на границе пространства $x = 0$, мы заключаем, что конечное состояние процесса, соответствующего решению при $\lambda < \lambda_c$, — тривиальный вакуум, т.е. рождения солитона не происходит. В критической точке, $\lambda = \lambda_c$, функция u стремится к π при $\zeta \rightarrow +\infty$, поэтому решение описывает рождение сфалерона в конце туннельного процесса. Численно мы нашли, что

$$\lambda_c = 2.62, \quad (2.38)$$

а соответствующее значение энергии равно $E_c = 1.2E_s$.

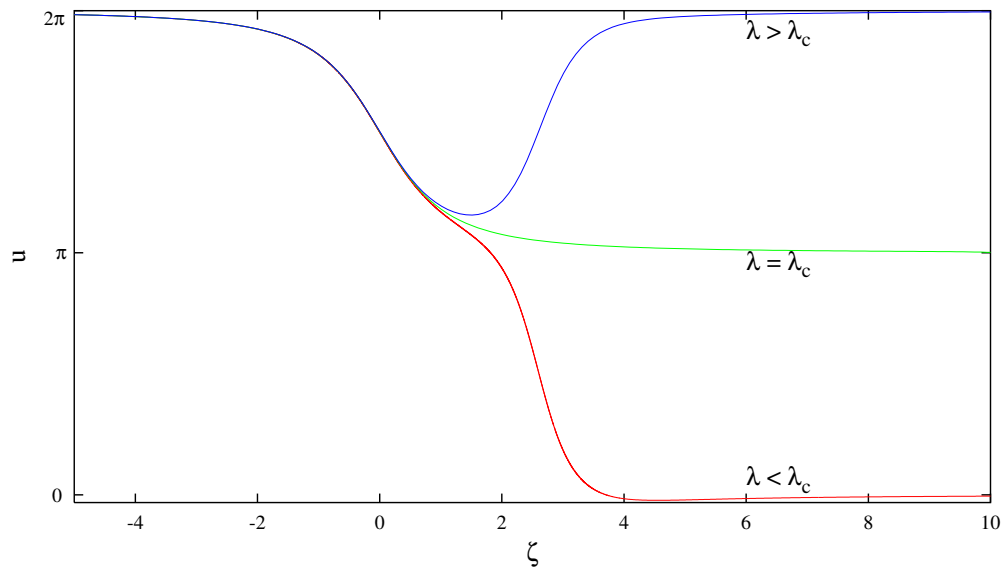


Рис. 2.1. Решения уравнения (2.36), найденные численно при $\lambda = 2.63$ (верхняя кривая), $\lambda = \lambda_c = 2.62$ (кривая посередине), и $\lambda = 2.61$ (нижняя кривая).

2.4.2 Аналитическое доказательство существования критической энергии Докажем следующие утверждения:

а) при $\lambda > 4$ существует решение уравнения (2.36) с асимптотиками (2.37);

б) при $\lambda < \pi/2$ решений уравнения (2.36) с асимптотиками (2.37) *не существует*.

Начнем с доказательства утверждения а). При $\lambda > 4$ линии, определяемые уравнением

$$\frac{4}{1 + \zeta^2} + \lambda \sin u = 0, \quad (2.39)$$

разделяют полосу $\pi < u < 2\pi$ плоскости (ζ, u) на три области, где производная решения уравнения (2.36) имеет разный знак, см. рис. (2.2). Условие (2.37а) достаточно для выделения единственного решения уравнения (2.36). Интегральная кривая этого решения начинается в области I рисунка при $\zeta = -\infty$. При увеличении ζ кривая пересекает линию (2.39) и попадает в область II, где $u' > 0$. Оказавшись в области II, интегральная кривая не может ее покинуть. Значит, u' остается положительным при $\zeta \rightarrow +\infty$, и интегральная кривая стремится к асимптоте $u = 2\pi$.

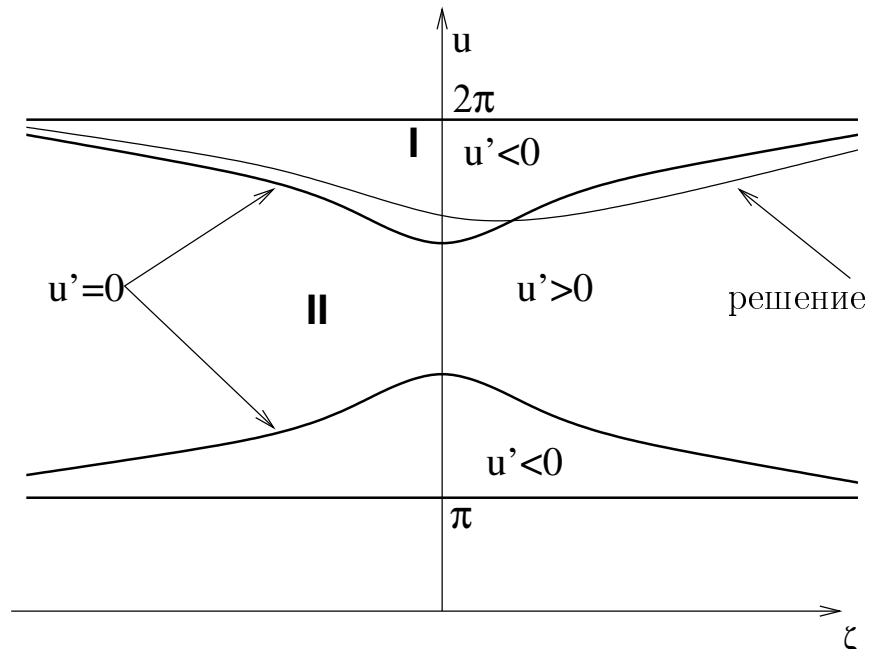


Рис. 2.2. Области положительного и отрицательного u' , а также качественное поведение решения уравнения (2.36) в случае $\lambda > 4$.

Докажем утверждение б). При $\lambda < \pi/2$ линии (2.39) имеют качественно другой вид по сравнению с линиями, построенными для случая а) (см. рис. 2.3). Точки поворота этих линий расположены при $\zeta = \pm\zeta_0$, где

$$\zeta_0 = \sqrt{4/\lambda - 1}.$$

При $\zeta < -\zeta_0$ интегральная кривая решения лежит в области I ($u' < 0$). Покажем, что она пересекает линию $u = \pi$ на отрезке $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$. Действительно, из уравнения (2.36) следует:

$$u' \leq \lambda - \frac{4}{1 + \zeta^2}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем:

$$u(\zeta_0) \leq u(-\zeta_0) + 2\lambda\zeta_0 - 8 \operatorname{arctg} \zeta_0 < \pi.$$

Оказавшись в области $u < \pi$, интегральная кривая больше не может попасть в область II, где $u' > 0$ (см. рис. (2.3)). Следовательно, она не стремится к асимптоте $u = 2\pi$ при $\zeta \rightarrow +\infty$.

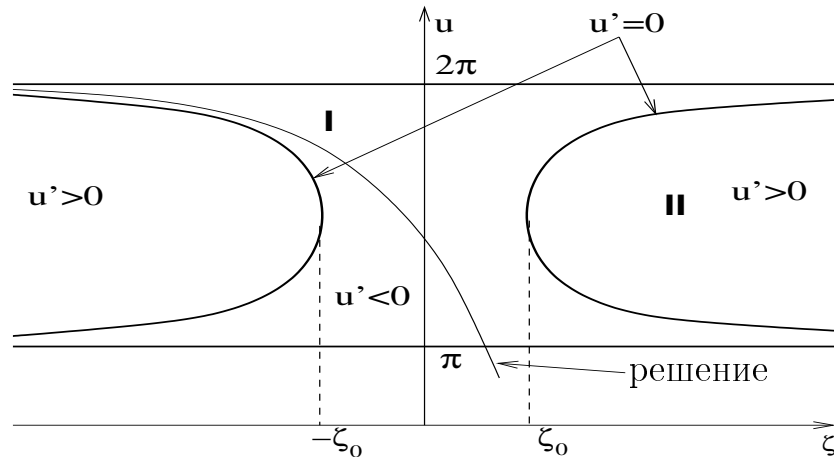


Рис. 2.3. Области положительных и отрицательных значений u' , а также качественный вид решения уравнения (2.36) в случае $\lambda < \pi/2$.

Из приведенного выше анализа следует существование критического значения $\pi/2 < \lambda_c < 4$, при котором качественный характер поведения решения качественно меняется. Численное значение λ_c найдено в предыдущем подразделе, см. формулу (2.38). Отметим, что туннелирование при критической энергии остается экспоненциально подавленным:

$$F(N = 0, E = E_c) = 4\pi \ln \lambda_c .$$

Исследованное в этом разделе поведение решений T/θ задачи совпадает с тем, которое мы обсуждали в главе 1 на примере квантомеханической задачи с двумя степенями свободы. Такая же ситуация возникает в калибровочной теории [79]. В главе 1 показано, что переходы при энергиях выше критической происходят в две стадии: туннельный переход с образованием состояния, близкого к вершине барьера (сфалерона), которое затем распадается на элементарные возбуждения. Вероятность последнего процесса — величина порядка единицы, в то время как процесс образования сфалерона экспоненциально подавлен. Таким образом, мы ожидаем, что при $E > E_c$ физически значимые квазиклассические решения должны содержать сфалерон при $t \rightarrow +\infty$. Чтобы найти эти решения, следует отбросить требование

действительности налетающей волны ϕ_i на действительной оси (и, следовательно, подстановку (2.24)).

2.5 Туннельное образование сфалерона при энергиях выше критической

2.5.1 Предел $N \rightarrow 0$ При $E > E_c$ подстановка (2.24) не позволяет найти правильное решение задачи. Однако, анализируя уравнения (2.10), (2.13), можно получить некоторую информацию о решении. Во-первых, покажем, что особенность функции ϕ_i , расположенная в полосе $\text{Im}z \in [0, T]$, является логарифмической. Пусть iT_0 — место расположения этой особенности. Функция ϕ_f регулярна при $z = iT_0$, так что ϕ_f и ϕ'_f могут быть приближены константами в окрестности этой точки. Тогда при $z \approx iT_0$ решение уравнения (2.10) представляется в виде

$$\phi_i(z) = -f_0 + 2\text{arctg} \left[\frac{\sqrt{f_1^2 - 1}}{f_1} \text{tg} \left(\frac{\sqrt{f_1^2 - 1}}{2} (\mu z - C) \right) - \frac{1}{f_1} \right], \quad (2.40)$$

где $f_0 = \phi_f(iT_0)$, $f_1 = \phi'_f(iT_0)/\mu$, а константа интегрирования C фиксируется условием, что одна из сингулярностей функции ϕ_i расположена в точке $z = iT_0$. Мы видим, что решение (2.40) обладает только логарифмическими особенностями. Таким образом, ϕ_i имеет вид (2.25), где функция R_i регулярна в полосе $\text{Im}z \in [0, T]$. Кроме того, заметим, что условия (2.26), (2.27), которым удовлетворяет функция R_i , выполнены, так как при их выводе мы не использовали явного вида функции ϕ_i . Вследствие уравнений (2.25), (2.13), кроме логарифмической особенности функция ϕ_i обладает особенностью вида

$$-ie^{-\theta} \ln \left[\frac{\mu}{2} (z - i(2T - T_0)) \right]. \quad (2.41)$$

Перечисленные выше свойства позволяют переписать T/θ задачу в пределе $\theta \rightarrow +\infty$ в форме, удобной для численного анализа. Как уже обсуждалось, этот предел соответствует квазиклассически малому количеству частиц в начальном состоянии, и, следовательно, особенно интересен.

Согласно уравнению (2.13), в пределе $e^{-\theta} \rightarrow 0$ функция ϕ_i становится регулярна в полуплоскости $\text{Im}z > T$. Покажем, что при этом ее логарифмическая сингулярность, расположенная в полосе $0 < \text{Im}z < T$, садится на прямую $\text{Im}z = T$. Запишем:

$$\phi_i = i \ln \left[\frac{\mu}{2}(z - iT_0) \right] - ie^{-\theta} \ln \left[\frac{\mu}{2}(z - i(2T - T_0)) \right] + \tilde{R}_i(z), \quad (2.42)$$

где функция $\tilde{R}_i(z)$ регулярна в точках $iT_0, i(2T - T_0)$. Тогда из соотношения (2.26) следует, что

$$\frac{e^{-\theta}}{T - T_0} = -2\tilde{R}_i'(iT_0). \quad (2.43)$$

Полученную формулу следует сравнить с равенствами (2.33), (2.28), применимыми при $E < E_c$. В последнем случае $\tilde{R}_i'(iT_0) = -1/T \neq 0$. По непрерывности, $\tilde{R}_i'(iT_0) \neq 0$ также для решений с энергиями, превышающими E_c . Тогда уравнение (2.43) означает, что T_0 приближается к T при $e^{-\theta} \rightarrow 0$. Мы заключаем, что в пределе $\theta \rightarrow +\infty$ функция ϕ_i представима в виде

$$\phi_i = i \ln \left[\frac{\mu}{2}(z - iT) \right] + \tilde{R}_i(z), \quad (2.44)$$

где $\tilde{R}_i(z)$ регулярна в верхней полуплоскости.

Как и в разделе (2.4), удобно получать решения на действительной оси⁷ $z = x \in \mathbb{R}$. Установим правильные асимптотики решения при $x \rightarrow \pm\infty$. Функция ϕ_i должна удовлетворять условию (2.15). Принимая во внимание логарифмический разрез ϕ_i в полосе $0 < \text{Im}z < T$ (см. раздел (2.4)) и условия (2.16), получим:

$$\phi_i \rightarrow 2\pi, \quad \phi_f \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad (2.45a)$$

$$\phi_i \rightarrow 0, \quad \phi_f \rightarrow \pi \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (2.45b)$$

Асимптотики (2.45) функции ϕ_f соответствуют рождению сфалерона в конце туннельного процесса.

⁷Не следует путать x , обозначающее действительную часть переменной z , с пространственной координатой x .

Удобное выражение для функционала действия получается следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\text{Im}S &= 2\text{Im} \int_{\mathcal{C}} dz(\phi_f \phi'_i - \mu(1 - \cos(\phi_i + \phi_f))) \\ &= -4\pi\text{Im}\tilde{R}_i(iT) + 4\pi + 2\text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dx(\phi_f \phi'_i - \mu(1 - \cos(\phi_i + \phi_f))) . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Во второй строке равенства мы использовали соотношение (2.26) и взяли предел $T_0 \rightarrow T$. Интеграл в последнем члене должен быть вычислен вдоль действительной оси; первые два члена соответствуют вычетам подынтегральной функции в особой точке функции ϕ_i . Для начальной и конечной энергий, E_i и E_f соответственно, получаем два разных выражения⁸. Для конечной энергии легко получить:

$$E_f = 2\mu + \int_{-\infty}^{\infty} dz(\phi'_f)^2 , \quad (2.47)$$

где первый член возник из-за присутствия сфалерона при $t \rightarrow +\infty$. Аналогичное выражение для начальной энергии имеет вид:

$$E_i = \int_{-\infty+iT}^{+\infty+iT} dz(\phi'_i)^2 . \quad (2.48)$$

В пределе $e^{-\theta} \rightarrow 0$ интеграл в уравнении (2.48) насыщается вкладом особенности в точке $z = i(2T - T_0)$. Получим:

$$E_i = 2\pi \frac{e^{-\theta}}{T - T_0} = -4\pi \tilde{R}'_i(iT) , \quad (2.49)$$

где во втором равенстве использовано соотношение (2.43).

Мы решили численно систему уравнений, состоящую из дифференциального уравнения (2.10) с граничными условиями (2.45), условия действительности функции ϕ_f (уравнение (2.11)), и условия аналитичности функции R_i в верхней полуплоскости. Детали численного метода помещены в следующем

⁸Очевидно, для решения $E_i = E_f$.

разделе. Отметим одно интересное свойство решений при $E > E_c$. Заметим, что приведенная выше система уравнений инвариантна относительно преобразования

$$\phi_i(z) \mapsto 2\pi - (\phi_i(-z^*))^* , \quad (2.50a)$$

$$\phi_f(z) \mapsto \pi - (\phi_f(-z^*))^* . \quad (2.50b)$$

В следующем разделе найдены решения при $E > E_c$, которые не меняются под действием этого преобразования. Приведенное свойство качественно отличает их от решений, найденных нами ранее при низких энергиях.

2.5.2 Численное решение В этом разделе система уравнений (2.10), (2.11), (2.44), (2.45) будет решена численно. Мы обнаружили два основных препятствия, затрудняющих применение численных методов. Во-первых, все физически значимые решения при $E > E_c$ близки к сфалерону при $t \rightarrow +\infty$, и, следовательно, нестабильны. В главе 1 предложен общий метод регуляризации нестабильностей такого вида, который оказывается крайне полезен для сложных систем. В нашем случае эту трудность можно преодолеть, используя специфику задачи. Как было отмечено в предыдущем разделе, уравнения (2.10), (2.11), (2.44) и граничные условия (2.45) инвариантны относительно преобразования (2.50). Будем искать решения, не меняющиеся под действием этого преобразования. Условие симметрии относительно (2.50) сужает множество рассматриваемых конфигураций до тех, которые близки к сфалерону при $t \rightarrow +\infty$. Ясно, что после этого решения уравнений становятся стабильными.

Вторым препятствием для применения численных методов служит медленное спадание решений при $x \rightarrow \pm\infty$. Уравнение (2.10) допускает существование решений с асимптотическим поведением вида $1/x$ при $x \rightarrow \pm\infty$; численное исследование подтверждает, что физически значимые решения действительно обладают таким поведением. Мы решаем эту проблему с помо-

щью введения неравномерной решетки, шаг которой растет при $x \rightarrow \pm\infty$. Это достигается с помощью конформного преобразования плоскости комплексного z :

$$w = \frac{z - iT}{z + iT}, \quad (2.51)$$

которое отображает действительную ось на окружность единичного радиуса $w = e^{i\alpha}$. При этом асимптотические области $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ переходят в окрестности точек $\alpha = 0$ и $\alpha = 2\pi$ соответственно. Ясно, что равномерное разбиение угла α эквивалентно введению неравномерной решетки на оси действительного z с требуемыми свойствами.

Переформулируем задачу на окружность $|w| = 1$. Введем функцию

$$S_i(z) = \phi_i(z) - i \ln \left(\frac{z - iT}{z + iT} \right).$$

Вследствие уравнения (2.44) функция $S_i(z)$ регулярна в верхней полуплоскости, $\text{Im}z > 0$. Значит, после конформного преобразования (2.51) она регулярна внутри круга $|w| < 1$, и ряд Тейлора

$$S_i(w) = i \sum_{k=0}^{\infty} S_k w^k$$

сходится во внутренности этого круга. На окружности $w = e^{i\alpha}$ получаем:

$$S_i(\alpha) = i \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^{ik\alpha}. \quad (2.52a)$$

Условие того, что ряд Фурье функции S_i содержит только положительно-частотные члены, эквивалентно условию (2.45). На окружности $|w| = 1$ уравнение (2.10) приобретает вид

$$\frac{d}{d\alpha} [S_i - \phi_f] = 1 + \frac{T\mu}{2 \sin^2(\alpha/2)} \sin(S_i + \phi_f - \alpha), \quad (2.52b)$$

где функция ϕ_f действительна вследствие условия (2.11). Что касается граничных условий (2.45), то требуется наложить лишь одно из них, после чего то все остальные будут выполнены автоматически. Действительно, если условия при $x \rightarrow -\infty$ ($\alpha \rightarrow 0$) выполнены, то выполнение условий при $x \rightarrow +\infty$

$(\alpha \rightarrow 2\pi)$ является прямым следствием симметрии относительно (2.50). Более того, условие на функцию S_i при $\alpha = 0$ выполняется автоматически вследствие уравнения (2.52b). Остается только одно условие:

$$\phi_f \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0 . \quad (2.52c)$$

Так как точки α и $2\pi - \alpha$ окружности связаны преобразованием симметрии (2.50), уравнение (2.52b) может рассматриваться как дифференциальное уравнение на орбифолде $\alpha \in [0, \pi]$. При этом условие (2.52c) накладывается на границе орбифолда. Заметим также, что преобразование (2.50) переводит коэффициенты Фурье S_k в комплексно сопряженные коэффициенты S_k^* , поэтому инвариантность функции S_i относительно симметрии (2.50) означает, что $S_k \in \mathbb{R}$.

Введем равномерную решетку с узлами в точках $\alpha_n = \Delta(n + 1/2)$, где $\Delta = \pi/\mathcal{N}$, $n = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$. Граничное условие (2.52c) имеет вид:

$$(\phi_f)_{n=0} = 0 . \quad (2.53a)$$

Условие, накладываемое на другой границе орбифолда, $\alpha = \pi$, может быть получено следующим образом. Запишем конечно-разностное уравнение, полученное дискретизацией уравнения (2.52b) между узлами \mathcal{N} , $\mathcal{N} + 1$. Так как значения полей в \mathcal{N} -ом узле связаны преобразованием симметрии со значениями в $(\mathcal{N} - 1)$ -ом узле, получим:

$$\frac{1}{\Delta} \left[\pi - 2(\phi_f)_{\mathcal{N}-1} + 2\text{Re}(S_i)_{\mathcal{N}-1} \right] = 1 + \frac{\mu T}{2 \sin^2(\alpha_{\mathcal{N}-1/2})} \sin \left(\text{Re}(S_i)_{\mathcal{N}-1} + (\phi_f)_{\mathcal{N}-1} - \alpha_{\mathcal{N}-1} \right) \text{ch} \left(\text{Im}(S_i)_{\mathcal{N}-1} \right) . \quad (2.53b)$$

Коэффициентная функция уравнения (2.52b) сингулярна при $\alpha = 0$. Следовательно, требуется найти такое конечно-разностное приближение уравнения (2.52b), которое нечувствительно к этой сингулярности. В численных

расчетах мы использовали следующее приближение:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta} [(S_i)_n - (S_i)_{n-1}] - \frac{1}{\Delta} [(\phi_f)_n - (\phi_f)_{n-1}] = 1 + \\
+ \frac{\mu T}{2 \sin^2(\alpha_{n-1/2}/2)} \left\{ \sin((S_i)_{n-1} + (\phi_f)_n - \alpha_{n-1/2}) + \right. \\
\left. + \frac{\Delta}{2} \cos((S_i)_{n-1} + (\phi_f)_n - \alpha_{n-1/2}) \right\} \\
- \frac{\mu^2 T^2 \Delta^2}{4 \sin^4(\alpha_{n-1/2}/2)} \sin((S_i)_n + (\phi_f)_n - \alpha_{n-1/2}) \cos((S_i)_{n-1} + (\phi_f)_n - \alpha_{n-1/2}) .
\end{aligned} \tag{2.53c}$$

Здесь порядковый номер n меняется между 1 и $\mathcal{N} - 1$. Легко проверить, что при $\alpha \sim 1$ уравнение (2.53c) является конечно-разностным приближением второго порядка к уравнению (2.52b). При $\alpha_n \sim \Delta$ доминирует последний член уравнения (2.53c), и мы получаем:

$$(S_i)_n + (\phi_f)_n - \alpha_n = 0 \quad \text{when} \quad \alpha_n \sim \Delta .$$

Невязка этого уравнения — величина порядка $O(\Delta^2)$. Приближение оказывается еще хуже в области между $\alpha_n \sim \Delta$ и $\alpha_n \sim 1$. Численное исследование показало, что ошибка полученного решения δ удовлетворяет соотношению $\Delta^2 < |\delta| < \Delta$.

Наконец, в дискретизованной задаче следует заменить уравнение (2.52a) дискретным преобразованием Фурье, где сумма берется в конечных пределах: $k = 0 \dots \mathcal{N} - 1$. В качестве искомых величин выберем $S_k, (\phi_f)_n$. Так как $k, n = 0 \dots (\mathcal{N} - 1)$, общее число неизвестных, $2\mathcal{N}$, совпадает с количеством уравнений в системе (2.53) (два действительных условия (2.53a), (2.53b) на краях орбифолда и $(\mathcal{N} - 1)$ -о комплексное уравнение (2.53c)). Численные решения системы нелинейных уравнений (2.53) были получены методом Ньютона–Рафсона. Удобные выражения для конечной энергии и мнимой части действия получаются дискретизацией выражений (2.17), (2.47). Чтобы найти численно начальную энергию, (2.47), заметим, что

$$\tilde{R}'_i(z = iT) = \frac{1}{2T} [1 - iS'_i(w = 0)] = \frac{1}{2T} [1 + S_{k=1}] .$$

Мы используем разницу между начальной и конечной энергиями для оценки ошибки разностного приближения. В практических вычислениях использовалась решетка с $\mathcal{N} = 2048$, для всех полученных решений точность дискретизации была лучше 10^{-3} .

Численные результаты для экспоненты подавления $F(N = 0)$ показаны на рис. 2. Они покрывают отрезок $E_c < E < 2.3E_s$ области II рисунка. Подчеркнем, что численные результаты получены при *тождественно нулевом* числе частиц. Возможность избавиться от дополнительной предельной процедуры $N \rightarrow 0$ — достоинство модели (2.1).

При высоких энергиях (на практике, при $E > 2.3E_s$) численное исследование решений с использованием приведенного выше метода становится проблематичным. Дело в том, что при росте энергии параметр T уменьшается, и логарифмическая сингулярность решения приближается к действительной оси (см. уравнение (2.44)). Вследствие этого, используемые в численных расчетах конечно-разностные методы не могут быть применены в области вблизи $z = 0$ при малых T . В следующем разделе мы покажем, что в пределе $\mu T \rightarrow 1$ решение вблизи сингулярности может быть получено аналитически, что позволяет полностью определить решение при малых T .

2.6 Предел $T \rightarrow 0$

2.6.1 Предельное решение В этом подразделе мы получаем туннельное решение в пределе $T \rightarrow 0$. Чтобы разрешить структуру сингулярностей решения в окрестности точки $z = 0$, мы держим значение T малым, но ненулевым, $\mu T \ll 1$, и берем предел только в результирующих выражениях для энергии и экспоненты подавления. С той же целью мы вводим конечное $e^{-\theta} \ll 1$. Удобно выбрать контур \mathcal{C} , входящий в формулу (2.17) для функционала действия, так, как показано на рис. (2.4). Из соотношений (2.15), (2.16)

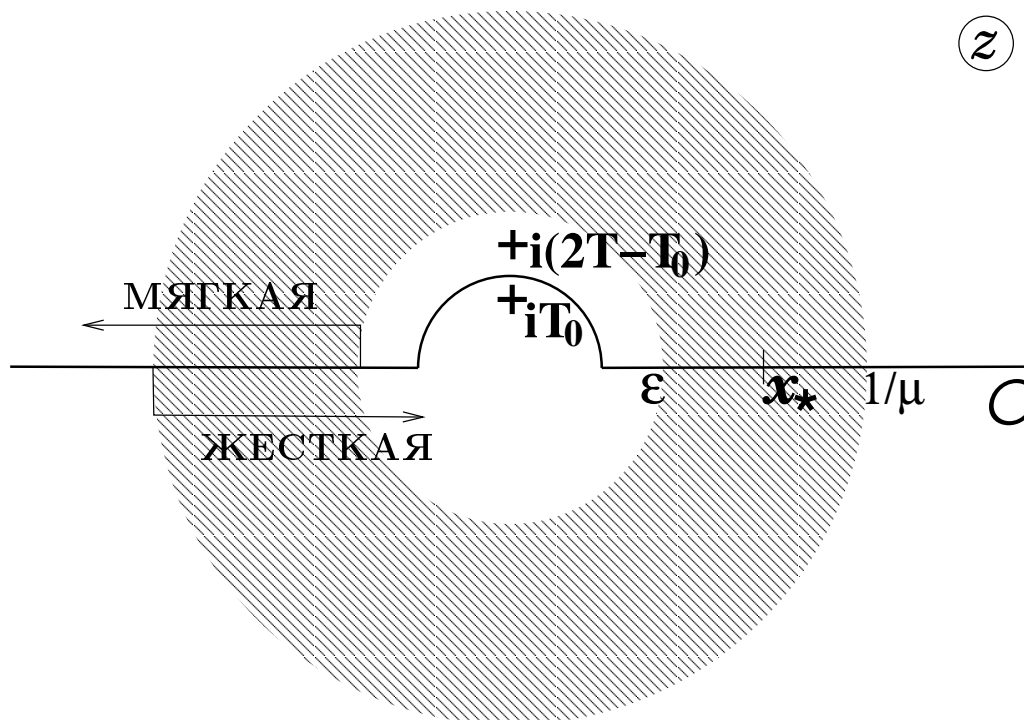


Рис. 2.4. «Жесткая» и «мягкая» области комплексной плоскости. Соответствующие части решения сшиты в заштрихованной области. Кресты показывают расположение особых точек функции ϕ_i в верхней полуплоскости.

получим асимптотики решения при $x \rightarrow -\infty$ вдоль контура \mathcal{C} :

$$\phi_i \rightarrow 0, \quad \phi_f \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (2.54)$$

Условия (2.45b) при $x \rightarrow +\infty$ остаются теми же самыми. Отличие условий (2.54) и (2.45a) объясняется тем, что контур \mathcal{C} и действительная ось лежат на разных листах римановой поверхности функции ϕ_i . Соответственно, свойства симметрии решений, рассматриваемых на новом листе плоскости комплексного z , несколько отличаются от свойств, обнаруженных в разделе 2.5: вместо преобразования (2.50), решение инвариантно относительно преобразования, представленного формулами (2.50b) и

$$\phi_i(z) \mapsto -\phi_i^*(-z^*). \quad (2.55)$$

Пусть $\varepsilon = \max\{T, e^{-\theta}/\mu\}$. Разобьем комплексную плоскость на две области: «жесткую», где $|z| \ll 1/\mu$, и «мягкую», где $|z| \gg \varepsilon$. В этом разделе мы

решаем уравнения отдельно в каждой из областей, сшивая полученные части решения в области пересечения $\varepsilon \ll |z| \ll 1/\mu$ (см. рис. 2.4).

Начнем с «жесткой» области. Подставляя выражение (2.25) в уравнение (2.10) и пренебрегая членами порядка $O((\mu z)^2)$, получаем⁹:

$$R'_i - \phi'_f = -\frac{i}{z - iT_0} \left(1 + e^{i(R_i + \phi_f)}\right). \quad (2.56)$$

Тривиальное решение этого уравнения имеет вид

$$R_i = \phi_f = \frac{\pi}{2}. \quad (2.57)$$

Соответствующая функция ϕ_i удовлетворяет θ -условию (2.13) с точностью до поправок порядка $e^{-\theta}$. Как мы видели в предыдущем разделе, в главном приближении по $e^{-\theta}$ решение сингулярно на контуре \mathcal{C} (ср. (2.43)). Чтобы разрешить сингулярность, найдем поправку первого порядка по ε . Для этого линеаризуем уравнение (2.56):

$$r' - \varphi' = -\frac{r + \varphi}{z - iT_0}. \quad (2.58)$$

Здесь использованы обозначения $r = R_i - \pi/2$, $\varphi = \phi_f - \pi/2$. Линейное уравнение (2.58) может быть разрешено относительно функций φ , r . Получим:

$$\varphi = -r + (z - iT_0) \int \frac{2r'(z_1)}{z_1 - iT_0} dz_1, \quad (2.59)$$

$$r = \varphi - \frac{2}{z - iT_0} \int_{iT_0}^z \varphi(z_1) dz_1, \quad (2.60)$$

где константа интегрирования в выражении (2.60) фиксируется условием регулярности функции r в точке $z = iT_0$. Значение константы интегрирования в уравнении (2.59) не важно, поэтому мы его не определяем.

Исследуем сингулярности функций φ , r . Как и в предыдущем разделе, легко видеть, что единственная особая точка функции $r(z)$, которая находится в верхней полуплоскости, — сингулярность вида (2.41), расположенная

⁹Замечательно, что уравнение (2.56) инвариантно относительно конформного преобразования $\phi_{i,f}(z) \mapsto \phi_{i,f}(w(z)) - \frac{i}{2} \ln \frac{dw}{dz}$.

в точке $z = i(2T - T_0)$ (ср. (2.42)). Тогда из уравнения (2.59) следует, что единственная особенность $\varphi(z)$ из верхней полуплоскости расположена в той же точке $z = i(2T - T_0)$ (как и раньше, явная сингулярность при $z = iT_0$ исчезает после наложения на функцию $r(z)$ условия (2.27)). Действительность $\varphi(z)$ на действительной оси говорит о том, что эта функция имеет только одну особенность вдобавок к уже рассмотренной, которая расположена в точке $z = -i(2T - T_0)$ и имеет вид, «комплексно сопряженный» по отношению к особенности при $z = i(2T - T_0)$. Определим форму особенностей функции $\varphi(z)$ из уравнения (2.59), выделим их явно и разложим оставшуюся целую функцию в ряд Тейлора. Получим:

$$\begin{aligned} \varphi = & -\frac{e^{-\theta}}{\mu(T - T_0)} \left(\mu(z - iT) \ln \left[\frac{\mu}{2}(z - i(2T - T_0)) \right] + \right. \\ & \left. + \mu(z + iT) \ln \left[\frac{\mu}{2}(z + i(2T - T_0)) \right] \right) - \frac{\pi T e^{-\theta}}{T - T_0} + A_0 \mu z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\mu z)^{1+2n}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Вид первого члена во второй строке, а также отсутствие четных степеней разложения целой функции фиксируются симметрией (2.50b). Коэффициенты в выражении (2.61) определяются при склейке «жесткой» и «мягкой» частей решения. Ниже показано, что в «мягкой» области функция ϕ_f принимает значения порядка единицы, поэтому все коэффициенты $\frac{e^{-\theta}}{\mu(T - T_0)}$, A_0 , A_n тоже должны быть величинами порядка единицы. Таким образом, вкладом суммы в «жесткой» области можно пренебречь. Подставляя выражение (2.61) в равенство (2.60), получаем:

$$\begin{aligned} r = & -ie^{-\theta} \ln \left[\frac{\mu}{2}(z - i(2T - T_0)) \right] + i \frac{T + T_0}{T - T_0} e^{-\theta} \ln \left[\frac{\mu}{2}(z + i(2T - T_0)) \right] \\ & - \frac{4TT_0}{T - T_0} e^{-\theta} \frac{1}{z - iT_0} \ln \left[1 + \frac{z - iT_0}{2iT} \right] - \frac{e^{-\theta}}{T - T_0} (z + iT_0) + \frac{\pi T e^{-\theta}}{T - T_0} - iA_0 \mu T_0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

В области $\varepsilon \ll |z| \ll 1/\mu$ выражения (2.61), (2.62), записанные в терминах

функций ϕ_i , ϕ_f , принимают вид

$$\phi_i = i \ln \left[\frac{\mu}{2}(z - i0) \right] + \frac{\pi}{2} - \frac{e^{-\theta}}{T - T_0} z, \quad (2.63)$$

$$\phi_f = \frac{\pi}{2} - \frac{e^{-\theta}}{T - T_0} z \ln \left(\frac{\mu^2 z^2}{4} \right) + A_0 \mu z,$$

где опущены члены порядка $O(\mu T)$, $O(e^{-\theta})$, $O((\mu z)^2)$.

Найдем «мягкую» часть решения. В области $|z| \gg \varepsilon$ контур \mathcal{C} расположен вдоль действительной оси. Вводя действительную и мнимую части налетающей волны, $\phi_i(x) = a(x) + ib(x)$, перепишем уравнение (2.10) в виде системы двух действительных уравнений:

$$b' = \mu \operatorname{sh} b \cos u, \quad (2.64)$$

$$u' = 2a' - \mu \operatorname{ch} b \sin u, \quad (2.65)$$

где $u(x) = a(x) + \phi_f(x)$. В «мягкой» области решение регулярно вдоль оси $z \in \mathbb{R}$, поэтому регуляризирующими параметрами T , $e^{-\theta}$ можно пренебречь. [Решения с $T \neq 0$ рассмотрены в следующем подразделе.] Тогда функция ϕ_i регулярна в верхней полуплоскости «мягкой» области, поэтому ее действительная и мнимая части связаны соотношением:

$$a'(x) = \frac{1}{\pi x} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \frac{x_1 b'(x_1)}{x_1 - x}, \quad (2.66)$$

где интеграл берется в смысле главного значения. Граничное условие в точке $x = 0$ для уравнений (2.64), (2.65), (2.66) получим из условия склейки с «жесткой» частью решения. Из выражений (2.63) следует, что:

$$b \rightarrow \ln \left(\frac{\mu}{2} x \right), \quad a \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad u \rightarrow \pi \quad \text{при} \quad x \rightarrow +0. \quad (2.67)$$

Условия при $x \rightarrow -0$ получаются из требования симметрии решения относительно преобразования (2.55), (2.50b). Перепишем в новых терминах условия (2.45b), (2.54):

$$a \rightarrow 0, \quad b \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \pi \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.68)$$

и преобразование (2.50b), (2.55):

$$b(x) \mapsto b(-x) , \quad a(x) \mapsto -a(-x) , \quad u(x) \mapsto \pi - u(-x) . \quad (2.69)$$

Вследствие симметрии (2.69), достаточно рассматривать только полуось $x > 0$. Для заданной наперед функции u решение уравнения (2.64) имеет вид:

$$b(x) = \ln \operatorname{th} \left(-\frac{\mu}{2} \int_0^x \cos u(x_1) dx_1 \right) , \quad (2.70)$$

где мы наложили условие (2.67) в начале координат ¹⁰. Уравнения (2.70), (2.66), (2.65) составляют полную систему.

Хорошее аналитическое приближение можно получить, линеаризуя уравнения (2.70), (2.65) по отношению к $\delta u = u - \pi$. При этом, выражение (2.70) принимает вид

$$b = \ln \operatorname{th} \left(\frac{\mu}{2} x \right) .$$

Подстановка выражения для $b(x)$ в уравнение (2.66) позволяет получить выражение для a' :

$$a' = -\frac{\mu}{\pi} \left(\beta \left(1 + i \frac{\mu}{\pi} x \right) + \beta \left(1 - i \frac{\mu}{\pi} x \right) \right) ,$$

где

$$\beta(x) = \frac{d}{dx} \left(\ln \left[\Gamma \left(\frac{x+1}{2} \right) \right] - \ln \left[\Gamma \left(\frac{x}{2} \right) \right] \right) .$$

Теперь функция δu может быть получена из уравнения (2.65) (опустим соответствующее аналитическое выражение).

Линейное приближение может быть улучшено с помощью итеративного численного метода. Каждый цикл итераций состоит в последовательном решении уравнений (2.70), (2.66), (2.65), что позволяет определить одну за другой функции b , a , δu , стартуя с приближения для δu , полученного на предыдущем цикле. После 30 итераций получаем решение с точностью порядка

¹⁰Заметим, что вследствие поведения (2.68) функции $u(x)$ при больших x асимптотика функции $b(x)$ имеет вид $b \propto e^{-\mu x}$. Такое поведение говорит о том, что при $t \rightarrow +\infty$ мнимая часть решения соответствует движению вдоль отрицательной моды сфалерона. Это — общее свойство туннельных решений, описывающих заскоки на сфалерон (см. главу 1).

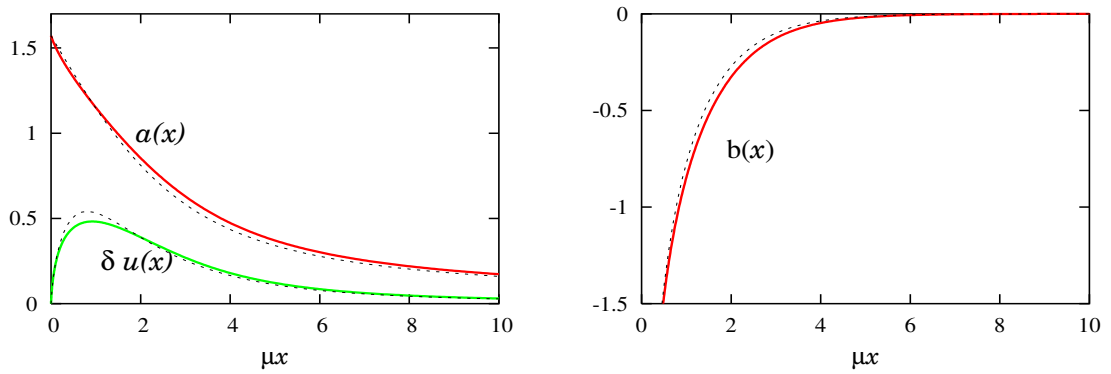


Рис. 2.5. Решение при $T = 0$, найденное в «мягкой» области. Штриховые линии соответствуют решению, найденному в линейном приближении.

10^{-6} . Найденные итеративно функции a , b , δu , и те же функции, найденные в линейном приближении, показаны на рис. 2.5.

Рассмотрим поведение решения при $x \rightarrow +0$. Уравнение (2.65) допускает решения со следующим поведением:

$$a = \frac{\pi}{2} - A\mu x + O(x^2), \quad \phi_f = \frac{\pi}{2} - 2A\mu x \ln\left(\frac{\mu x}{2}\right) + B\mu x + O(x^2). \quad (2.71)$$

Мы убедились в том, что полное численное решение и решение, найденное в линейном приближении, имеют поведение (2.71) вблизи $x = 0$. Численно находим: $A = 0.845$, $B = -2.90$. Сопоставляя эти выражения с асимптотиками «жесткой» части решения, получаем:

$$\frac{e^{-\theta}}{T - T_0} = A\mu, \quad A_0 = B. \quad (2.72)$$

Теперь решение при $T = 0$ найдено полностью.

Сделаем следующее замечание. Может показаться, что при $T, e^{-\theta} \rightarrow 0$ существенна только «мягкая» часть решения, которая покрывает всю комплексную плоскость в этом пределе. Однако, при $T, e^{-\theta} \rightarrow 0$ решение становится сингулярным в точке $z = 0$, что делает невозможным вычисление энергии и мнимой части действия. Таким образом, под «предельным решением» в дальнейшем будем понимать не только решение в «мягкой» области, но и соответствующую регуляризацию сингулярности (формулы (2.61), (2.62)).

Вычислим мнимую часть функционала действия. Естественно представить его как сумму вкладов «жесткой» и «мягкой» частей решения. Пренебрегая членами порядка μT , $e^{-\theta}$, получим:

$$2\text{Im}S_{hard} = 2\text{Im} \int_{C, |z| < x_*} \left(\frac{i\pi}{2(z - iT_0)} - \mu - \frac{1}{z - iT_0} \right) dz = 2\pi .$$

Здесь x_* — действительное число из области $\varepsilon \ll x_* \ll 1/\mu$. Вклад «мягкой» части решения запишем в виде

$$\begin{aligned} 2\text{Im}S_{soft} &= 2 \int_{|x| > x_*} (\phi_f b' - \mu \text{sh } b \sin u) dx \\ &= 2\pi b(x_*) + 4 \int_{x_*}^{\infty} (\phi_f - \text{tg } u) b' dx = 4 \int_0^{\infty} \left(\frac{u'}{\cos^2 u} - \phi_f' \right) b dx , \end{aligned} \quad (2.73)$$

где при переходе ко второй строке мы использовали уравнение (2.64) и симметрию по отношению к преобразованию (2.69), а в последнем выражении опущены члены, исчезающие при $x_* \rightarrow 0$. Хорошее приближение для $2\text{Im}S_{soft}$ получается в линейном приближении:

$$2\text{Im}S_{soft}^{lin} = 4 \int_0^{\infty} a' b dx = 4\pi \left(-6\zeta'(-1) - \frac{\ln 2}{6} - \frac{\ln \pi}{2} \right) = 3.83 ,$$

где интеграл вычислен по формулам 8.371.2, 3.951.14 из [103]. Интегрируя полное численное решение (2.73), получаем:

$$2\text{Im}S_{soft} = 3.98 .$$

Заметим, что это значение — величина того же порядка, что и вклад 2π , полученный из «жесткой» части решения.

Важной величиной является энергия предельного решения. Как и ранее, мы вычисляем энергии начального и конечного состояний независимо. Формула (2.47) для конечной энергии применима в пределе $T \rightarrow 0$, а для начальной энергии следует использовать аналог выражения (2.49):

$$E_i = 2\pi \frac{e^{-\theta}}{T - T_0} = 2\pi A\mu ,$$

где константа A определена в формуле (2.71). Для найденного численного решения с хорошей точностью выполнено $E_f = E_i$; это может рассматриваться как подтверждение самосогласованности использованного метода. Получено следующее значение:

$$E_o = 2.65E_s, \quad (2.74)$$

которое назовем оптимальной энергией. С первого взгляда, результат (2.74) вызывает удивление. Действительно, можно было бы ожидать, что решения T/θ задачи должны покрывать всю область $E \in [0; +\infty)$. Уравнение (2.74) показывает, что это не так: в пределе $T \rightarrow 0$ получается решение с конечной энергией $E = E_o$, так что решений при $E > E_o$ не существует. С другой стороны, вычисленная при оптимальной энергии экспонента подавления не равна нулю:

$$F_m = F(N = 0, E = E_o) = 10.27. \quad (2.75)$$

Встает вопрос, как процесс туннелирования происходит при энергиях выше E_o , и чему равна соответствующая вероятность туннелирования.

Ответ на этот вопрос получен в следующей главе. Здесь отметим, что во всех формулах этого раздела, даже в формулах для «жесткой» области, можно положить $T = 0$ (для регуляризации решений достаточно держать ненулевым параметр $e^{-\theta}$). Мы приходим к выводу, что существует семейство регулярных решений T/θ задачи, соответствующих $T = 0$, $\theta \neq 0$. Эти решения называются «инстантонами действительного времени», их свойства подробно рассмотрены в главе 3. В частности, мы покажем, что экспонента подавления процесса остается постоянной при $E > E_o$, т.е. экспонента подавления при высоких энергиях равна (2.75).

Выражения (2.74), (2.75), полученные в данном разделе, соответствуют одной точке графика на рис. 2. В следующем подразделе мы находим решения при малых T и $e^{-\theta} = 0$, что позволяет построить функцию $F(E)$ в области $2.3E_s < E < E_o$, которая недоступна для исследования с помощью численных

методов раздела 2.5.2.

2.6.2 Решения при малых T Цель этого подраздела двойка. Во-первых, мы собираемся исследовать структуру решений T/θ задачи при малых T . Во-вторых, мы получим формулы для экспоненты подавления, применимые в области $2.3E_s < E < E_0$, которая не покрыта численными результатами раздела 2.5.2. Чтобы сделать анализ максимально прозрачным, ниже мы работаем в пределе $e^{-\theta} = 0$ (также используется система единиц $\mu = 1$).

Приближение, найденное в разделе 2.6.1, имеет вид нескольких первых членов систематического разложения точного решения по степеням параметра T . Покажем это. Так как в «жесткой» области $z \sim T$, естественно представить «жесткую» часть решения в виде

$$\phi_{i,f}^{(h)} = \phi_{i,f}^{(h0)}(\zeta) + T\phi_{i,f}^{(h1)}(\zeta) + T^2\phi_{i,f}^{(h2)}(\zeta) + \dots, \quad (2.76)$$

где ζ обозначает перемасштабированную переменную:

$$\zeta = z/T.$$

[Мы разрешаем функциям $\phi_{i,f}^{(h0)}(\zeta), \phi_{i,f}^{(h1)}(\zeta), \dots$ содержать члены порядка $\ln^n T$.] Представим решение, полученное в предыдущем разделе, в виде (2.76).

Используя соотношения (2.61), (2.62), (2.25), (2.72), получим:

$$\begin{aligned} \phi_i^{(h)} = & \left\{ \frac{\pi}{2} + i \ln \left(\frac{T}{2} \right) + i \ln(\zeta - i) \right\} \\ & + T \left\{ 2iA \ln T + 2iA \frac{\zeta + i}{\zeta - i} \ln \left(\frac{\zeta + i}{2i} \right) - A\zeta - i(A + B) \right\} \end{aligned} \quad (2.77a)$$

$$\begin{aligned} \phi_f^{(h)} = & \frac{\pi}{2} + T \left\{ -A(\zeta - i) \ln(\zeta - i) - A(\zeta + i) \ln(\zeta + i) - \right. \\ & \left. - 2A\zeta \ln \left(\frac{T}{2} \right) + B\zeta - \pi A \right\}, \end{aligned} \quad (2.77b)$$

где коэффициенты A и B определены в уравнениях (2.71). Видно, что эти выражения соответствуют первым двум членам разложения (2.76).

В «мягкой» области $z \sim 1$, поэтому разложение записывается в виде

$$\phi_{i,f}^{(s)} = \phi_{i,f}^{(s_0)}(z) + T\phi_{i,f}^{(s_1)}(z) + T^2\phi_{i,f}^{(s_2)}(z) + \dots \quad (2.78)$$

Первый член этого разложения найден в предыдущем подразделе.

Чтобы построить полное решение, следует склеить асимптотики разложения (2.76) при $\zeta \rightarrow \infty$ с разложением (2.78) при $z \rightarrow 0$. Заметим, что так как аргументы функциональных коэффициентов в разложениях (2.76), (2.78) отличаются масштабным множителем T , склейка перепутывает члены разного порядка по T . Так, в предыдущем разделе мы использовали асимптотики приближения нулевого порядка по T (см. уравнения (2.72)) для определения коэффициентов первого порядка в «жесткой» области. В этом разделе мы вычисляем поправки первого порядка в «мягкой» области.

Так как $e^{-\theta} = 0$, функция $\phi_i^{(s_1)}$ регулярна в верхней полуплоскости «мягкой» области. Значит, ее действительная и мнимая части на действительной оси, $a^{(1)}(x)$ и $b^{(1)}(x)$, связаны формулой Коши (2.66). Для нахождения первой поправки следует линеаризовать уравнения (2.64), (2.65):

$$\left[\frac{d}{dx} - c(x) \right] b^{(1)} = -s(x)u^{(1)}, \quad (2.79)$$

$$\left[\frac{d}{dx} + c(x) \right] u^{(1)} = 2\frac{da^{(1)}}{dx} - s(x)b^{(1)}. \quad (2.80)$$

Как обычно, использовано обозначение $u^{(1)} = a^{(1)} + \phi_f^{(1)}$. Коэффициенты $c(x)$, $s(x)$ определены формулами

$$c(x) = \operatorname{ch} b^{(0)} \cos u^{(0)}, \quad s(x) = \operatorname{sh} b^{(0)} \sin u^{(0)}.$$

Граничные условия при $x = 0$ получены из условия склейки с «жесткой» частью решения. Для этого запишем выражения (2.77а) в терминах переменной $z = T\zeta$ и выделим пропорциональные T поправки, формально рассматривая переменную z как величину порядка 1. Как и ранее, это позволяет определить

поведение функций $\phi_{i,f}^{(s1)}$ при малых z :

$$\begin{aligned} \phi_i^{(s1)} &\rightarrow \left\{ \frac{1}{z} + 2iA \ln \left(\frac{z}{2} + i0 \right) - i(A + B) + \pi A \right\} \\ \phi_f^{(s1)} &\rightarrow -\pi A \end{aligned} \quad \text{при } z \rightarrow 0 ,$$

Наконец, вспомним, что вследствие уравнений (2.45) функции $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $u^{(1)}$ стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Приведенная выше задача может быть решена с помощью итеративного метода подобного тому, который использовался в предыдущем разделе. А именно, расчет начинается с грубого приближения $u^{(1)} = 1/x$, после чего функции $b^{(1)}$, $a^{(1)}$, $u^{(1)}$ находятся в результате последовательного решения уравнений (2.79), (2.66), (2.80). Полученное таким образом улучшенное приближение для $u^{(1)}$ используется на следующем цикле итераций. После 30 итераций получаем численное решение с точностью 10^{-4} .

Таким образом, мы определили первый член разложения решения по T в «мягкой» и «жесткой» областях. Теперь мы можем вычислить энергию решения (формула (2.48)) в первом порядке теории возмущений. Получим:

$$E(T) = E_l + 4\pi AT (2A \ln T - B) + WT . \quad (2.81)$$

В этом уравнении E_0 обозначает оптимальную энергию, второй член соответствует вкладу поправок первого порядка в «жесткой» области, а последний член представляет поправку, полученную численно в «мягкой» области:

$$W = 4 \int_0^{+\infty} dx \left[\frac{d\phi_f^{(0)}}{dx} \frac{d\phi_f^{(1)}}{dx} \right] = 9.6 .$$

Используя формулу (2.81) для энергии, можно вычислить экспоненту подавления (см. уравнения (2.6), (2.8)):

$$F|_{N=0} = F_m - T^2 [f_1 \ln T + f_2] , \quad (2.82)$$

где F_m обозначает подавление при оптимальной энергии, а константы f_1 , f_2 связаны с коэффициентами уравнения (2.81). Численно находим: $f_1 = 17.9$, $f_2 = 49.5$.

Мы используем выражения (2.81), (2.82) для определения функции $F(E)$ в интересующей нас области $2.3E_s < E < E_o$ (см. рис. 2). Заметим, однако, что выражения (2.81), (2.82) применимы только в окрестности точки $E = E_o$; поправки к этим формулам растут при удалении от оптимальной энергии. При $E = 2.3E_s$ можно сравнить значение экспоненты подавления, вычисленное по формулам (2.81), (2.82), со значением, полученным численно в разделе 2.5.2. Эти значения совпадают с точностью порядка 0.5%.

Глава 3

Метод инстантонов действительного времени

3.1 Общая формулировка

В главе 2 на примере простой теоретико–полевой модели было показано, что соответствующие индуцированному туннелированию ($N = 0$) решения T/θ задачи покрывают область $E < E_0$; величина E_0 называется оптимальной энергией. При этом, решение с оптимальной энергией соответствует точке $T = 0$, $\theta = +\infty$. В этой главе мы покажем, что при оптимальной энергии достигается абсолютный минимум экспоненты подавления процесса индуцированного туннелирования, а при более высоких энергиях функция $F(E)$ остается постоянной:

$$F(E) = F_m, \quad E > E_0. \quad (3.1)$$

Приведем вывод общего квазиклассического метода вычисления минимального значения F_m экспоненты подавления, а также оптимальной энергии E_0 , при котором это значение достигается. С помощью приведенного выше метода можно показать, что формула (3.1) верна для любой конкретной теоретико–полевой модели.

Рассмотрим инклюзивную вероятность туннелирования из подпространства состояний с заданным числом частиц N и *любой* энергией (ср. (3)):

$$\mathcal{P}_m(N) = \sum_{i,f} |\langle f | \hat{S} \hat{P}_N | i \rangle|^2. \quad (3.2)$$

Как и ранее, \hat{S} обозначает S -матрицу; \hat{P}_N — проектор на состояния с N частицами. Начальное и конечное состояния, $|i\rangle$ и $|f\rangle$ соответственно, должны быть разделены потенциальным барьером. Впоследствии мы увидим, что величина (3.2) может быть вычислена квазиклассически, если начальное число частиц параметрически велико, $N = \tilde{N}/g^2$. Результат имеет экспоненциаль-

ный вид:

$$\mathcal{P}_m(N) \propto e^{-F_m(\tilde{N})/g^2} . \quad (3.3)$$

Результат (3.3) может быть использован для получения информации об экспоненте подавления процесса индуцированного туннелирования. Из приведенных во Введении рассуждений следует, что инклюзивная многочастичная вероятность $\mathcal{P}_m(N)$ устанавливает ограничение сверху на искомую двухчастичную вероятность $\mathcal{P}(E)$ при произвольных энергиях E . Действительно, энергия начального состояния в формуле (3.2) может быть сколь угодно большой, а любое двухчастичное состояние можно превратить в многочастичное, добавляя необходимое количество не влияющих на процесс туннелирования частиц. Таким образом, выполнено неравенство

$$F_m(\tilde{N}) \leq F_m \equiv \min_{E \in [0; +\infty)} F(E) . \quad (3.4)$$

Более того, из предположения (5) следует, что

$$\lim_{\tilde{N} \rightarrow 0} F_m(\tilde{N}) = F_m \equiv \min_{E \in [0; +\infty)} F(E) . \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) позволяет вычислить минимальное значение экспоненты подавления процесса индуцированного туннелирования.

Займемся квазиклассическим вычислением многочастичной экспоненты $F_m(\tilde{N})$. Для этого представим инклюзивную вероятность $\mathcal{P}_m(N)$ в виде функционального интеграла. Используя свойство $\hat{P}_N \cdot \hat{P}_N = \hat{P}_N$, перепишем выражение (3.2) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m(N) &= \sum_{i', i'', f} \langle f | \hat{S} | i' \rangle \langle i' | \hat{P}_N | i'' \rangle \langle i'' | \hat{S} | f \rangle = \\ &= \int \mathcal{D}[\phi_f, a, a^*, b, b^*] e^{-\frac{1}{g^2} \int d\mathbf{k} [a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*]} \langle \phi_f | \hat{\mathcal{U}} | a \rangle \langle a | \hat{P}_N | b \rangle [\langle \phi_f | \hat{\mathcal{U}} | b \rangle]^* , \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $|\phi_f\rangle$ — собственные состояния операторов поля $\hat{\phi}$, а $|a\rangle$, $|b\rangle$ — когерентные состояния:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x})|\phi\rangle = \frac{\phi(\mathbf{x})}{g}|\phi\rangle , \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}|a\rangle = \frac{a_{\mathbf{k}}}{g}|a\rangle .$$

В последней строке равенства (3.6) мы перешли в представление Гайзенберга, обозначив за $\hat{\mathcal{U}} \equiv \hat{\mathcal{U}}(T_f, T_i)$ оператор эволюции. Здесь и далее подразумевается предел $T_f \rightarrow +\infty$, $T_i \rightarrow -\infty$. Используя представление амплитуды перехода в виде функционального интеграла, получим:

$$\langle \phi_f | \hat{\mathcal{U}} | a \rangle = \int_{\phi(T_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{1}{g^2} (i\tilde{S}[\phi] + B_i(\phi_i, a)) \right\}, \quad (3.7)$$

где граничный член B_i возникло из-за нетривиального матричного элемента для начальных состояний $\langle \phi | a \rangle$:

$$B_i(\phi_i, a) = \int d\mathbf{k} \left\{ -\frac{1}{2} a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} - \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \phi_i(\mathbf{k}) \phi_i(-\mathbf{k}) + \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}} \phi_i(\mathbf{k}) \right\} .$$

В этом выражении $\phi_i(\mathbf{k})$ обозначает образ Фурье по пространственным координатам полей при $t = T_i$. Матричный элемент проектора \hat{P}_N запишем в виде (см., к примеру, работы [57, 104]):

$$\langle a | \hat{P}_N | b \rangle = \int_{-i\infty}^{i\infty} d\theta \exp \left\{ \frac{1}{g^2} \left(\tilde{N}\theta + \int d\mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} e^{-\theta} \right) \right\} . \quad (3.8)$$

Подставляя выражения (3.7), (3.8) в формулу (3.6) и интегрируя по переменным b, b^* , получим искомое интегральное представление:

$$\mathcal{P}_m(N) = \int_{\phi(T_f)=\phi'(T_f)} \mathcal{D}[\phi, \phi', a, a^*] d\theta e^{-F/g^2}, \quad (3.9)$$

где

$$F = -\tilde{N}\theta - i\tilde{S}[\phi] + i\tilde{S}[\phi'] - B_i(\phi_i, a) - B_i^*(\phi'_i, a) + \int d\mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} e^{\theta} . \quad (3.10)$$

Отметим, что интегрирование по функции ϕ' в выражении (3.9) возникает из интегрального представления для комплексно сопряженной амплитуды $[\langle \phi_f | \hat{\mathcal{U}} | b \rangle]^*$.

Определенный формулой (3.10) функционал $F[\phi, \phi'; T, \theta]$ не зависит от константы связи g . Значит, в пределе слабой связи интеграл (3.9) вычисляется

по методу перевала. Седловые уравнения имеют следующий вид. Экстремизация функционала (3.10) по отношению к полям ϕ , ϕ' приводит к классическим уравнениям поля:

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \phi} = \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \phi'} = 0 . \quad (3.11a)$$

Краевые условия для этих уравнений получаются из условий экстремума выражения (3.10) по отношению к значениям, принимаемым полями в начале и в конце квазиклассической эволюции. Используя соотношение $\delta S / \delta \phi(T_f, \mathbf{x}) = \dot{\phi}(T_f, \mathbf{x})$ и принимая во внимание условие связи (см. (3.9))

$$\phi(T_f, \mathbf{x}) = \phi'(T_f, \mathbf{x}) , \quad (3.11b)$$

получим:

$$\dot{\phi}(T_f, \mathbf{x}) = \dot{\phi}'(T_f, \mathbf{x}) . \quad (3.11c)$$

В начальной асимптотической области $T_i \rightarrow -\infty$ эволюция полей ϕ , ϕ' линейна¹:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{1/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (f_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} T_i} + g_{-\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} T_i}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} , \\ \phi'_i &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{1/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (f'_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} T_i} + g'^*_{-\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} T_i}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} . \end{aligned}$$

Дифференцирование функционала F по полям ϕ_i , ϕ'_i , a , a^* приводит к следующим соотношениям между положительно- и отрицательно- частотными частями решения:

$$f'_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}} e^{\theta} , \quad g'^*_{-\mathbf{k}} = g_{-\mathbf{k}}^* e^{-\theta} . \quad (3.11d)$$

Упростим систему седловых уравнений (3.11). Для этого заметим, что конфигурации ϕ и ϕ' соответствуют седловым точкам, насыщающим функциональные интегралы для амплитуды и комплексно сопряженной амплитуды соответственно. Это наблюдение приводит к подстановке

$$\phi'(t, \mathbf{x}) = [\phi(t, \mathbf{x})]^* ,$$

¹Для конкретности предполагается, что начальное состояние является возбуждением над вакуумом $\phi = 0$.

которая проходит через краевую задачу (3.11) при условии, что седловое значение параметра θ действительно. Оставшиеся после подстановки уравнения составляют краевую задачу, которой должны удовлетворять поля $\phi(t, \mathbf{x})$. Условия (3.11b), (3.11c) означают, что поля действительны в асимптотическом будущем:

$$\operatorname{Im}\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im}\dot{\phi}(t, \mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad (3.12a)$$

а из уравнений (3.11d) следует, что

$$f_{\mathbf{k}} = e^{-\theta} g_{\mathbf{k}}. \quad (3.12b)$$

Краевое условие (3.12b) при $t \rightarrow -\infty$ совпадает с условием, накладываемым в общей T/θ задаче в асимптотическом прошлом. В целом, легко видеть, что полученная краевая задача (3.11a), (3.12) совпадает с T/θ задачей с $T = 0$.

Количество уравнений в задаче (3.11a), (3.12) совпадает с количеством неизвестных, поэтому, вообще говоря, для любого заданного наперед значения θ существует единственное решение $\phi_{rt}(t, \mathbf{x})$. Мы называем это решение «инстантоном действительного времени», так как оно задано в действительном времени, в отличие от обычного инстантона, определенного на евклидовой оси. Отметим важное свойство инстантонов действительного времени. В главах 1, 2 отмечалось, что при высоких энергиях θ -инстантоны удовлетворяют условию действительности только асимптотически, оставаясь комплексными при конечных $t \in \mathbb{R}$. В нашем случае комплексность решения на действительной оси гарантирована условием (3.12b), поэтому инстантоны действительного времени должны стремиться к сфалерону при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, решения задачи (3.11a), (3.12) соответствуют переходам через потенциальный барьер, происходящим в два этапа: сначала происходит туннельное рождение сфалерона, затем — его распад с вероятностью порядка единицы.

Последнее седловое уравнение, эквивалентное условию экстремума выражения (3.10) по параметру θ , связывает значение этого параметра с началь-

ным числом частиц:

$$\tilde{N} = \int d\mathbf{k} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*. \quad (3.13)$$

Подставляя решение краевой задачи в выражение (3.10), получим формулу (3.3) для вероятности туннелирования, где экспонента подавления определяется из выражения

$$F_m(\tilde{N}) = -\tilde{N}\theta + 2\text{Im} \left\{ \tilde{S}[\phi_{rt}] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \phi_{rt} \dot{\phi}_{rt} \Big|_{t=T_i} \right\}. \quad (3.14)$$

Заметим, что член в скобках соответствует проинтегрированному по частям действию, которое вычислено на решении.

При конечных значениях параметра θ ($N \neq 0$) инстантоны действительного времени по построению являются гладкими конфигурациями. Следует ожидать, что их классическая энергия $E_o(\tilde{N})$ конечна. Так как квазиклассическая краевая задача (3.11a), (3.12) совпадает с T/θ задачей с $T = 0$, минимальная экспонента подавления (3.14) совпадает с экспонентой подавления перехода при фиксированных энергии $E = E_o(N)$ и числе частиц N . [Значение энергии $E_o(N)$, соответствующее данному инстантону действительного времени, может быть получено по общей формуле (2.5a).] Мы заключаем, что при энергии $E = E_o(N)$ достигается минимум функции $F(E, N)$:

$$F_m(N) = \min_{E \in [0; +\infty)} F(E, N).$$

В пределе

$$E_o = \lim_{N \rightarrow 0} E_o(N). \quad (3.15)$$

Мы заключаем, что прильную энергию процесса индуцированного туннелирования². Легко видеть, что при энергиях выше оптимальной процесс перехода происходит следующим образом. В начале процесса система освобождает избыток энергии $(E - E_o)$, испуская пертурбативно одну или несколько частиц

²Вообще говоря, не исключен случай, когда $E_o(\tilde{N}) \rightarrow \infty$ при $\tilde{N} \rightarrow 0$. В рассмотренном ниже примере значение E_o конечно.

(этот процесс подавлен лишь степенным образом по g^2), а затем туннелирует при оптимальной энергии. Этот двух–ступенчатый процесс, был впервые предложен в работе [87]. Экспонента подавления этого процесса равна F_m . Таким образом, $F(E)$ остается постоянной при $E > E_0$, т.е. формула (3.1) выполнена.

3.2 Пример применения

С помощью метода инстантонов действительного времени вычислим экспоненту подавления процесса индуцированного рождения краевых солитонов в модели главы 2. В этой модели решения краевой задачи (3.11а), (3.12) могут быть получены численно с помощью итерационного метода, использованного для поиска решений в разделе (2.6). Как и ранее, введем функции a , b , u и перепишем уравнения поля (3.11а) в виде (2.64), (2.65). Функция $u(x) = a(x) + \phi_f(x)$ по-прежнему действительна вследствие условия (3.12b). Заметим, что в отличие от случая, рассматриваемого в разделе (2.6), мы ищем решения, регулярные на всей действительной оси, включая точку $x = 0$. Условие регулярности, накладываемое совместно с требованием симметрии

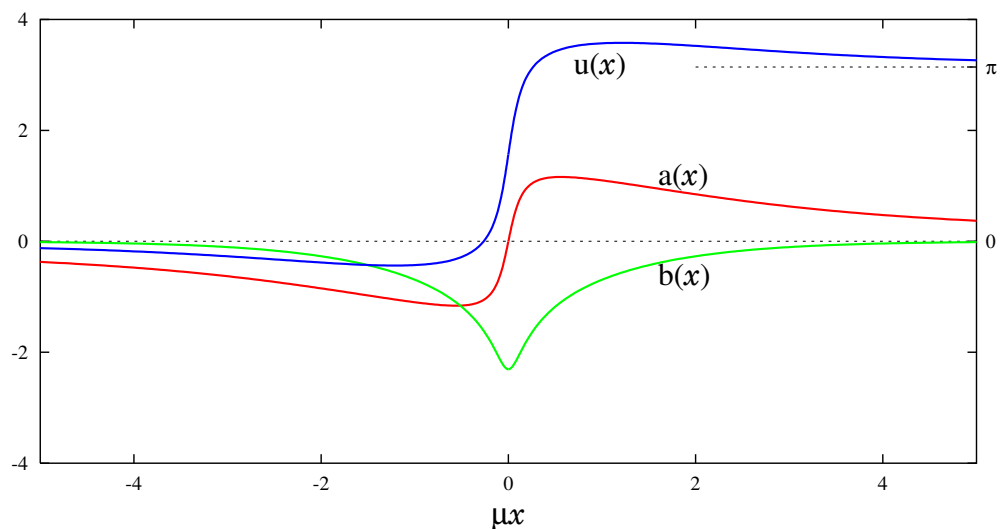


Рис. 3.1. Пример инстантона действительного времени ($\theta = 2.04$, $N = 2.3$).

относительно преобразования (2.69), приводит к следующим условиям при $x = 0$:

$$b'(0) = 0, \quad a(0) = 0, \quad u(0) = \pi/2. \quad (3.16)$$

Краевые условия в асимптотическом прошлом запишем в виде, аналогичном (2.66); так как θ конечно, формулу (2.66) необходимо модифицировать. Требуемая модификация может быть построена следующим образом. Заметим, что действительная \tilde{a} и мнимая \tilde{b} части функции χ , определенной формулами (2.13), (2.14), связаны соотношением (2.66). Используя уравнение (2.13), функции a , b можно выразить через \tilde{a} , \tilde{b} . Получим:

$$a'(x) = \frac{1 + e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \cdot \frac{1}{\pi x} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \frac{x_1 b'(x_1)}{x_1 - x}. \quad (3.17)$$

Наконец, выразим $b(x)$ из уравнения (2.64) (в отличие от случая раздела 2.6, константу интегрирования оставляем произвольной):

$$b(x) = \ln \operatorname{th} \left(-\frac{\mu}{2} \int_0^x \cos u(x_1) dx_1 + \varkappa \right). \quad (3.18)$$

Численные решения получим итеративно, решая одно за другим уравнения (3.18), (3.17), (2.65). Значение параметра \varkappa определяется на каждом цикле итераций из требования выполнения граничных условий (3.16), (2.68). Пример решения показан на рис. 3.1.

Классическая энергия и мнимая часть действия для инстантонов действительного времени вычисляются по формулам (2.47), (2.17). Начальное число частиц (выражение (3.13)) может быть представлено в виде

$$N = -\frac{2}{\operatorname{sh} \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} a' b dx.$$

Энергия и экспонента подавления как функции начального числа частиц показаны на рис. 3.2. Графики начинаются из точки $N = 0$ ($\theta = +\infty$), соответствующей предельному решению подраздела 2.6.1, и заканчиваются при $N = 3.7$, где экспонента подавления процесса равна нулю. Таким образом,

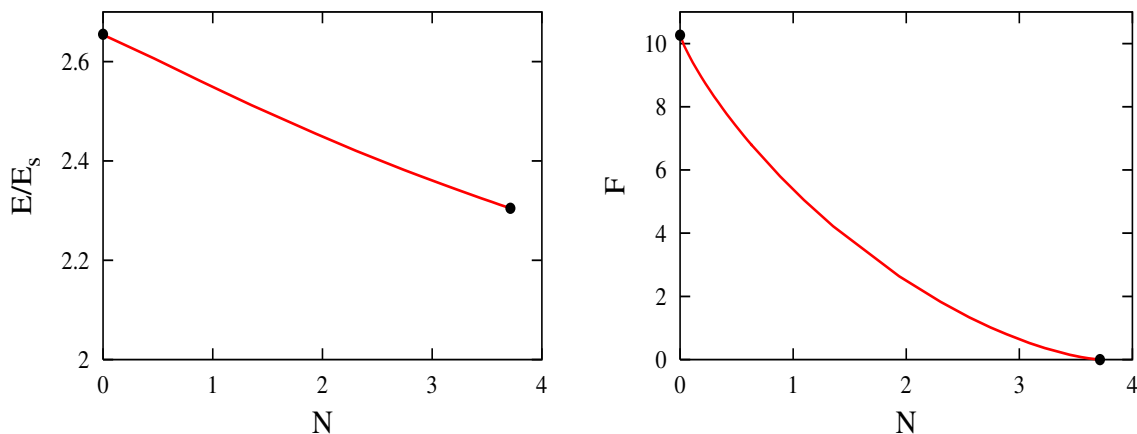


Рис. 3.2. Энергия инстантонов действительного времени и посчитанная на них экспонента подавления как функции начального числа частиц.

ветвь инстантонов действительного времени интерполирует между предельной точкой и точкой, соответствующей классическому надбарьерному переходу.

3.3 Квазиклассическое описание туннелирования при энергиях выше оптимальной

В этом разделе мы применяем квазиклассический метод, который несколько отличается от методов, использованных в других разделах диссертации. Вместо инклюзивной вероятности туннелирования (3), мы изучаем туннелирование из *фиксированного* состояния с заданным количеством частиц N и энергией E . Предполагается, что энергия превышает энергию инстантона действительного времени, найденного при том же начальном числе частиц, $E > E_o(N)$. Покажем, что экспонента подавления процесса перехода из специально подобранного начального состояния совпадает с экспонентой, посчитанной для соответствующего инстантона действительного времени.

Используя подход работы [105], можно показать, что любая полевая конфигурация, удовлетворяющая полевым уравнениям в плоскости комплексного времени и действительная при $t \rightarrow +\infty$, может быть использована для

определения вероятности туннелирования вида

$$\tilde{\mathcal{P}}(E, N; a) = \sum_f \frac{|\langle f | \hat{\mathcal{S}} \hat{P}_E \hat{P}_N | a \rangle|^2}{\langle a | \hat{P}_E \hat{P}_N | a \rangle}. \quad (3.19)$$

Здесь суммирование производится только по конечным состояниям, а в качестве начального состояния $\hat{P}_E \hat{P}_N | a \rangle$ выбрано когерентное состояние, спроектированное на подпространство состояний с данной энергией и числом частиц. Для любого заданного наперед решения соответствующее когерентное состояние определяется следующим образом:

$$\hat{a}_k | a \rangle = f_k | a \rangle, \quad (3.20)$$

где f_k обозначают положительно-частотную часть решения³ $\phi(t, x)$ при $t \rightarrow -\infty$:

$$\phi(t, x) \Big|_{t \rightarrow -\infty} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} (f_k e^{-i\omega_k t + ikx} + g_k^* e^{i\omega_k t - ikx}).$$

Заметим, что частотные компоненты решения теперь определяются вдоль оси действительного времени. Энергия E и начальное число частиц N по-прежнему вычисляются по формулам (2.5). В частности, энергия совпадает с классической энергией решения. Экспонента подавления для вероятности туннелирования (3.19) формально задана выражением (2.8), где значения параметров T и θ теперь определяются из уравнений

$$E = \int dk \omega_k f_k f_k^* e^{2\omega_k T + \theta}, \quad N = \int dk f_k f_k^* e^{2\omega_k T + \theta}. \quad (3.21)$$

Заметим, что средняя энергия и число частиц состояния $|a\rangle$ не совпадают со значениями E и N .

Рассмотрим следующую конфигурацию, которая слабо отличается от инстантона действительного времени:

$$\phi(t, x) = \phi^{(rt)}(t, x) + \alpha \psi(t/\beta, x/\beta), \quad (3.22)$$

³Для простоты здесь и далее мы пишем формулы для (1+1)-мерного пространства-времени. Обобщение на многомерный случай тривиально.

где малая поправка представлена функцией $\psi(\tilde{t}, \tilde{x})$, которая действительна при $\tilde{t} \in \mathbb{R}$, и достаточно быстро спадает при $\tilde{x} \rightarrow \infty$ и фиксированном \tilde{t} . При малых значениях параметров α, β характерная частота изменения поправки велика, поэтому функция ψ удовлетворяет уравнению Даламбера. Запишем общее решение в виде. Получим:

$$E = E^{(\text{rt})} + \frac{\alpha^2}{\beta} \int dk |\psi_k|^2 |k| + O(\alpha, \beta)$$

$$N = N^{(\text{rt})} + O(\alpha, \beta) .$$

Здесь мы приняли во внимание, что линейные вклады вида $\alpha \sqrt{\beta} \int dk \psi_{(k,\beta)} f_k^{*(\text{rt})}$ стремятся к нулю, так как волновой пакет $\psi(\tilde{t}, \tilde{x})$ хорошо локализован при фиксированном \tilde{t} (ψ_k клещено при $k \rightarrow 0$), а инстантон действительного времени — гладкая функция ($f_k^{(\text{rt})} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$). Приведенные формулы показывают, что в пределе

$$\alpha, \beta \rightarrow 0, \quad \alpha^2/\beta \text{ фиксировано}$$

решение (3.22) описывает туннелирование из начального состояния, которое отличается от инстантона действительного времени добавлением нескольких частиц, несущих квазиклассически большую порцию энергии. Построенное решение описывает. Прямым вычислением легко показать, что поправки к мнимой части действия малы, также как малы и поправки к параметрам T, θ (см. соотношения (3.21)). Таким образом, мы получаем, что экспонента подавления процесса перехода из выбранного специальным образом состояния с фиксированными $N, E > E_0(N)$, совпадает с экспонентой, полученной для инстантона действительного времени, с точностью до поправок порядка $O(\alpha, \beta)$.

Как и раньше, экспонента подавления процесса индуцированного туннелирования может быть получена в пределе $N \rightarrow 0$. Таким образом, результаты данного раздела подтверждают, что $F(E)$ остается постоянной при $E > E_0$.

Глава 4

Особенности туннелирования в моделях квантовой космологии

4.1 Модель туннельного рождения замкнутой вселенной

Традиционный формализм квантовой космологии основан на эффективном низкоэнергетическом уравнении Уилера–Де Витта [106], которое применимо на расстояниях, превышающих планковский масштаб $l_{\text{PL}} = 10^{-33}$ см. С помощью этого уравнения особенно интересно изучать ранние этапы эволюции вселенной, когда квантовые эффекты могут играть существенную роль. Предложено несколько способов описания процесса рождения вселенной [88, 91, 107, 108]; они эквивалентны наложению различных краевых условий на решения уравнения Уилера–Де Витта. В этой главе мы рассмотрим условия Виленкина, которые аналогичны краевым условиям, накладываемым на волновые функции в квантовомеханических задачах рассеяния. После наложения этих условий квантовое рождение замкнутой вселенной из «ничто» приобретает вид туннельного процесса [88–92] (см. также обзор [109]). В работе [88] исследована одномерная модель рождения пустой однородной изотропной вселенной. Показано, что в этом случае свойства процесса туннельного рождения вселенной буквально повторяют свойства туннелирования в одномерной квантовой механике.

В этой главе мы покажем, что добавление материальных степеней свободы может качественно изменить процесс туннелирования в квантовой космологии. Рассмотрим модель, в которой имеется массивное скалярное поле с конформной связью. Действие скалярного поля запишем в виде:

$$S_{\Phi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{1}{12} R \Phi^2 \right).$$

Воспользуемся приближением минисуперпространства, т.е. ограничимся рас-

смотрением только пространственно однородных полей:

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \cdot \text{diag}(N^2(\eta), -1, -1, -1), \quad \Phi = \frac{\phi(\eta)}{a(\eta)},$$

где η обозначает временную переменную, $N(\eta)$ — функцию временного сдвига, а $a(\eta)$ представляет собой масштабный фактор. Функция сдвига $N(\eta)$ не является динамической переменной, ее фиксация эквивалентна определенному выбору параметризации времени. Впоследствии будем использовать калибровку $N = 1$, а переменную η будем называть конформным временем. Запишем действие для модели минисуперпространства в виде¹:

$$S = S_a + S_\phi, \quad (4.1)$$

$$S_a = \int d\eta (\dot{a}\pi_a - N\mathcal{H}_a), \quad (4.2)$$

$$S_\phi = \int d\eta (\dot{\phi}\pi_\phi - N\mathcal{H}_\phi), \quad (4.3)$$

где гамильтонианы гравитационного и скалярного полей заданы следующими выражениями:

$$\mathcal{H}_a = -\frac{\pi_a^2}{2} - \left(\frac{a^2}{2} - \Lambda a^4 \right), \quad (4.4)$$

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{\pi_\phi^2}{2} + \frac{1}{2}(1 + m^2 a^2)\phi^2. \quad (4.5)$$

Отметим, что функция Гамильтона гравитационного поля отрицательно определена.

После квантования координаты \hat{a} , $\hat{\phi}$ и импульсы $\hat{\pi}_a$, $\hat{\pi}_\phi$ становятся операторами, удовлетворяющими стандартным коммутационным соотношениям. Вследствие калибровочной инвариантности возникает уравнение связи, накладываемое на волновую функцию вселенной:

$$(\hat{\mathcal{H}}_a + \hat{\mathcal{H}}_\phi)\Psi + \epsilon\Psi = 0. \quad (4.6)$$

¹Для удобства в выражении (4.1) использована планковская система единиц, а поля перемасштабированы.

Уравнение (4.6) представляет собой уравнение Уилера–Де Витта для модели (4.1). Отметим, что параметр ϵ , введенный в уравнение с целью регуляризации начального состояния (туннелирование из «ничто»), может возникнуть после добавления в модель пространственно однородного конформного скалярного поля [89].

Отметим, что вследствие того, что полный гамильтониан системы не положительно определен, модель (4.1) *качественно* отличается от соответствующих квантовомеханических моделей. Так, уравнение Уилера–Де Витта (4.6) является уравнением гиперболического типа, поэтому стандартные квазиклассические методы описания квантовомеханического туннелирования могут быть не применимы для описания квантового рождения вселенной. Для качественного понимания физики процесса катастрофического рождения частиц можно формально рассматривать гамильтониан скалярного поля $\hat{\mathcal{H}}_\phi$ как константу. В этом случае уравнение (4.6) описывает туннелирование одномерной системы с энергией $(\epsilon + \mathcal{H}_\phi)$ через потенциальный барьер

$$V(a) = \frac{a^2}{2} - \Lambda a^4.$$

Мы видим, что возбуждение материальной степени свободы (увеличение $\hat{\mathcal{H}}_\phi$) ведет к экспоненциальному *увеличению* вероятности туннелирования, и процесс рождения частиц оказывает существенное обратное влияние на туннельный процесс. Это свойство и отличает модель (4.1) от квантовомеханических моделей. Можно показать, что для модели (4.1) пертурбативное разложение вблизи одномерного квазиклассического решения не работает [92]; задачу приходится решать численно.

4.2 Численное решение уравнения Уилера–Де Витта

В этом и последующем разделах мы численно решаем уравнения Уилера–Де Витта для модельных систем с двумя степенями свободы, кинетические

члены которых имеют противоположные знаки. Результат, который мы получим, говорит о том, что для широкого диапазона значений параметров модели туннелирование сопровождается процессом катастрофического рождения частиц.

Для эффективного применения численных методов модель (4.1) следует модифицировать. Удобно явно исключить зависимость от малой космологической постоянной Λ , с помощью замены

$$b = \sqrt{\Lambda} a .$$

Уравнение Уилера — Де Витта принимает вид:

$$\left[\frac{1}{2} \Lambda \frac{\partial^2}{\partial b^2} - \frac{1}{\Lambda} (U(b) - \tilde{\epsilon}) + \hat{\mathcal{H}}_\phi \right] \Psi(b) = 0 , \quad (4.7)$$

где использовано координатное представление по b , а представление операторов $\hat{\pi}_\phi$, $\hat{\phi}$ не фиксировано. Гамильтониан материи

$$\hat{\mathcal{H}}_\phi = \frac{1}{2} \hat{\pi}_\phi^2 + \frac{1}{2} \Omega^2(b) \hat{\phi}^2 \quad (4.8)$$

имеет вид осцилляторного гамильтониана, где частота

$$\Omega^2(b) = \omega^2 + M^2 f(b) \quad (4.9)$$

зависит от координаты b . В этих выражениях мы ввели общий параметр² ω , а также функции $U(b)$, $f(b)$, которые представляют собой потенциал и функцию, характеризующую взаимодействие. Для уравнения Уилера — Де Витта (4.6) имеем:

$$U(b) = \Lambda V(b/\sqrt{\Lambda}) = (b^2/2 - b^4), \quad f(b) = b^2 .$$

Параметры $\tilde{\epsilon}$ и M соотносятся с параметрами уравнения (4.6) следующим образом:

$$\tilde{\epsilon} = \Lambda \epsilon , \quad M^2 = \frac{m^2}{\Lambda} . \quad (4.10)$$

²Для неоднородных мод скалярного поля $\omega^2 = k^2 + 1$. Заметим, что k обозначает конформный импульс скалярного поля, который связан с физическим импульсом соотношением $p_{\text{phys}} = k/a = k\sqrt{\Lambda}/b$.

	c	α_1	b_1	α_2	b_2	α_3	b_3
f_1	1.356	0.2	-6	-2	-6	3	5
f_2	1.356	-0.2	6	2	6	-3	0
f_3	1.454	-0.225	0.7	3	0.7	-2.55	-0.65

Таблица 4.1

Параметры функций взаимодействия

Впоследствии считаем все параметры гамильтониана (4.8) величинами порядка 1, кроме космологической постоянной Λ , которая мала.

Заметим, так как $U(0) = 0$, $f(0) = 0$, в точке $b = 0$ накладываются *свободные* краевые условия (см. ниже), и область изменения координаты b может быть расширена до $(-\infty; +\infty)$. После этого, удобно сдвинуть координату b таким образом, чтобы точка $b = 0$ соответствовала *максимуму* потенциала. Для модельной задачи сам потенциал $U(b)$ и функции взаимодействия $f(b)$ удобно выбрать быстро спадающими при $b \rightarrow \pm\infty$:

$$U(b) = e^{-b^2/2} \quad (4.11)$$

$$f(b) = \frac{c}{e^{\alpha_1(b-b_1)} + e^{\alpha_2(b-b_2)} + e^{\alpha_3(b-b_3)}}. \quad (4.12)$$

Мы получали решения для трех наборов параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и b_1, b_2, b_3 , которые приведены в таблице 4.1. Параметр c подбирался таким образом, чтобы значение функций взаимодействия f_1, f_2, f_3 в максимуме было равно 1. Таким образом, интенсивность взаимодействия между степенями свободы характеризуется параметром M . Потенциал и три функции взаимодействия показаны на рис. 4.1. Видно, что формы и области локализации функций f_1, f_2, f_3 сильно отличаются, поэтому наблюдаемые для всех трех случаев качественные свойства процесса должны быть верны и для функции взаимодействия общего положения.

Перейдем к численному решению уравнения (4.7). Запишем граничные условия Виленкина [88] в удобном виде. При больших $|b|$ взаимодействие

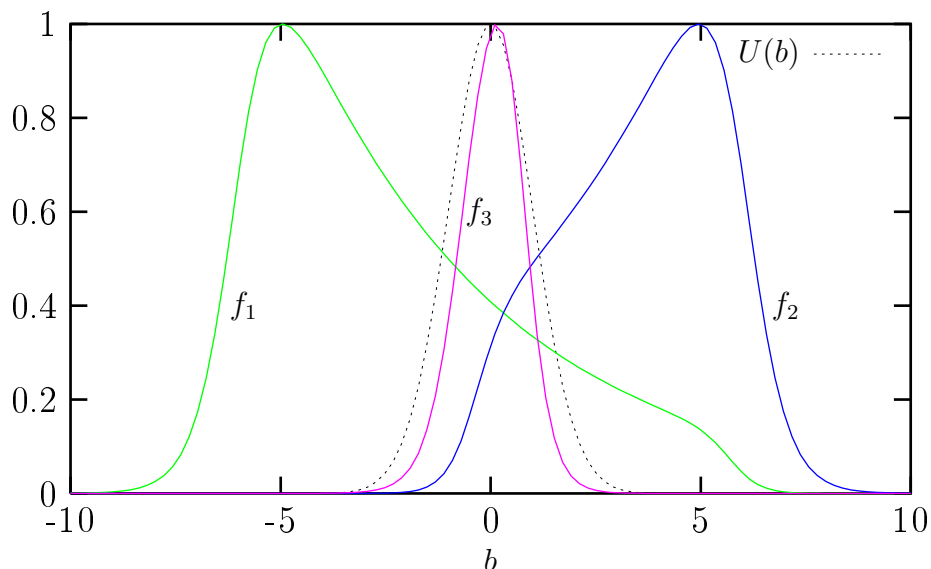


Рис. 4.1. Потенциал $U(b)$ и три функции взаимодействия

между переменными b и ϕ исчезающе мало, а частота осциллятора равна ω . Представим волновую функцию в асимптотических областях $b \rightarrow \pm\infty$ в виде

$$\Psi(b) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\pm}(b) \Psi_n^{(\omega)}, \quad b \rightarrow \pm\infty. \quad (4.13)$$

Из уравнения (4.7) получим:

$$C_n^{\pm}(b) = t_n^{\pm} e^{ik_n b} + r_n^{\pm} e^{-ik_n b}$$

где

$$k_n = \sqrt{\frac{2}{\Lambda} \left[\frac{\tilde{\epsilon}}{\Lambda} + \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]}.$$

Рассмотрим туннелирование из основного состояния осциллятора ($n_0 = 0$). Тогда туннельные краевые условия эквивалентны требованию исчезновения отрицательно-частотной части волновой функции справа от потенциального барьера, а амплитуда положительно-частотной части слева от барьера равна $\delta_{n,0}$:

$$\begin{aligned} r_n^+ &= 0, \\ t_n^- &= \delta_{n,0}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Эти условия аналогичны туннельным краевым условиям в квантовой механике двух степеней свободы.

Мы решили граничную задачу (4.7), (4.14) численно. Решеточная формулировка уравнения Уилера—Де Витта и метод поиска решений системы линейных уравнений подробно рассмотрены в работах [16, 94]. Ниже приведен анализ полученных результатов.

Для описания решений при конечных b удобно работать в базисе «мгновенного» гамильтониана осциллятора. А именно, выберем базисные элементы удовлетворяющие

$$\hat{\mathcal{H}}_\phi(b)\Psi_n^{(\Omega)}(b) = E_\phi^{(n)}(b)\Psi_n^{(\Omega)}(b) ,$$

где

$$E_\phi^{(n)}(b) = \Omega(b) \left(n + \frac{1}{2} \right) .$$

В новом базисе волновая функция записывается в виде

$$\Psi(b) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(b)\Psi_n^{(\Omega)}(b) . \quad (4.15)$$

Нас будет интересовать поведение чисел заполнения $|C_n(b)|^2$ как функций масштабного фактора b и номера возбуждения n . Мы увидим, что в интересном случае малых Λ числа заполнения имеют экспоненциальный вид

$$|C_n(b)|^2 \propto e^{-\frac{1}{\Lambda}F(b,\Lambda E_n)} ,$$

так что при заданном b они имеют острый максимум при определенном значении n . Типичные зависимости коэффициентов $\Lambda \ln |C_n|$ от номера возбуждения n , полученные при достаточно больших значениях M и малых Λ , приведены на рис. 4.2. [Приведенный график соответствует функции взаимодействия f_1 , но качественная картина процесса остается такой же для функций f_2, f_3 .]

Как видно из рисунка, слева от потенциального барьера осциллятор на-

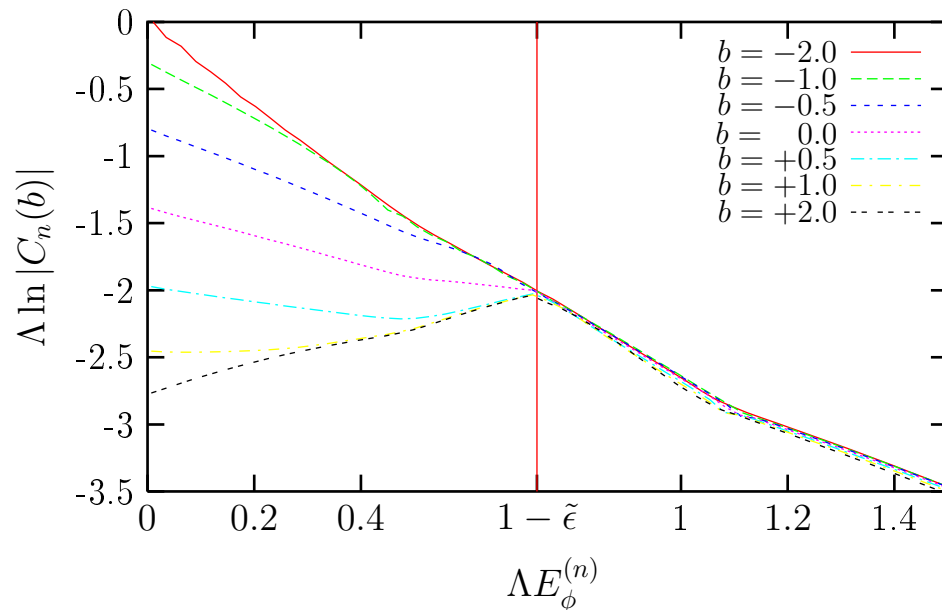


Рис. 4.2. Зависимость числа заполнения уровня осциллятора от его энергии, построенная для нескольких значений масштабного фактора. Функция взаимодействия равна f_1 , $\Lambda = 0.0225$, $M = 0.2$, $\omega = 0.6$, $\tilde{\epsilon} = 0.27$.

ходитя в основном состоянии³. После прохождения барьера волновая функция имеет острый максимум, так что полная энергия материи в конечном состоянии $(E_\phi^{(n)}) + \tilde{\epsilon}/\Lambda$ близка к высоте барьера $V_{\max} = 1/\Lambda$. Легко представить механизм перехода, в результате которого происходит рождение частиц. Взаимодействие между степенями свободы системы ведет к экспоненциально слабому рождению квантов поля ϕ (которое происходит либо до прохождения барьера для функции взаимодействия f_1 , либо под барьером для функций f_2, f_3). При прохождении барьера числа заполнения низко лежащих уровней экспоненциально падают, так что в результате выживают только уровни с $E_\phi^{(n)} \gtrsim 1/\Lambda$. Таким образом, происходит катастрофическое рождение частиц при прохождении потенциального барьера.

Простой способ изучения свойств решений — исследовать поведение средней энергии ϕ -осциллятора. Для конечных b определим эту величину следу-

³Из рисунка явствует, что даже в области $b \rightarrow -\infty$ волновая функция содержит малую примесь возбужденных состояний осциллятора. Это происходит из-за присутствия отраженной волны.

ющим образом:

$$\langle E_\phi \rangle(b) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_\phi^{(n)}(b) |C_n(b)|^2}{\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(b)|^2}. \quad (4.16)$$

В асимптотической области $b \rightarrow +\infty$ можно ввести другое, более привычное для квантовой механики определение:

$$\langle E_\phi \rangle^{asympt} = \left. \frac{\sum_{n=0}^{\infty} k_n \omega(n + 1/2) |C_n|^2}{\sum_{n=0}^{\infty} k_n |C_n|^2} \right|_{b \rightarrow +\infty}. \quad (4.17)$$

Вследствие того, что коэффициенты $|C_n|$ имеют острый максимум при определенном значении n , результаты, полученные с помощью этих двух формул, практически не отличаются: $\langle E_\phi \rangle^{asympt} \approx \langle E_\phi \rangle(b \rightarrow +\infty)$.

Из рисунка 4.2 можно предположить, что полная энергия материи при $b \rightarrow +\infty$ должна быть близка к $V_{\max} = 1/\Lambda$, т.е.

$$\langle E_\phi \rangle^{asympt} \approx \frac{1}{\Lambda} (1 - \tilde{\epsilon}). \quad (4.18)$$

Зависимость $\langle E_\phi \rangle^{asympt}$ от параметра $\tilde{\epsilon}$ показана на рис. 4.3. Заметим, что уравнение (4.18) выполнено неточно, так как, вообще говоря, в нем должна фигурировать энергия осциллятора в области вблизи вершины барьера, а не ее асимптотическое значение. Для данного n энергия вблизи вершины барьера равна $(n + 1/2)\Omega(b \approx 0) = (n + 1/2)\sqrt{\omega^2 + M^2 f(b \approx 0)}$, что несколько выше, чем асимптотическое значение $(n + 1/2)\omega$. Таким образом, имеет смысл изучать энергию (4.16) как функцию b , а не только асимптотическое значение энергии. Соответствующие зависимости показаны на рис. 4.4. Видно, что система забирается на вершину барьера, а затем остается на уровне с фиксированным n .

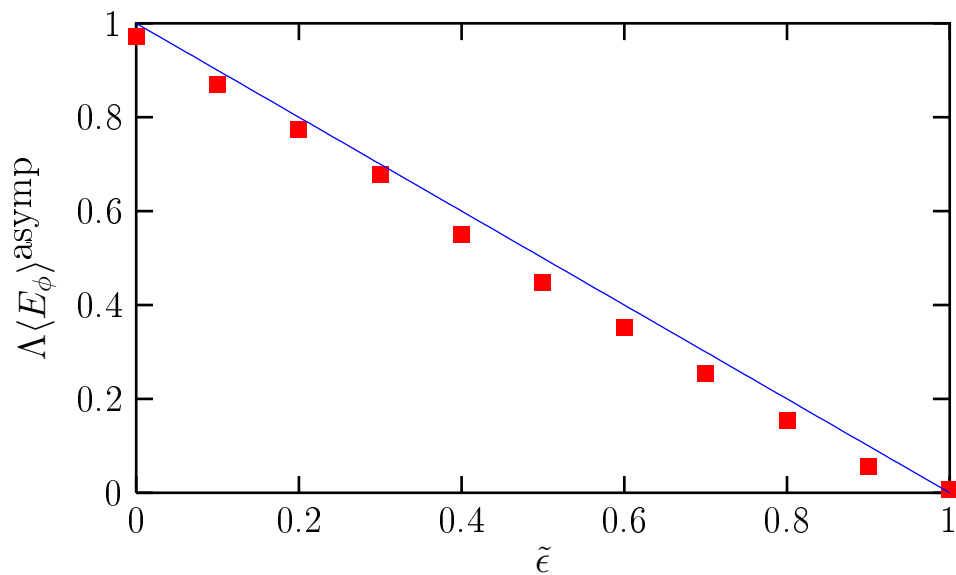


Рис. 4.3. Зависимость энергии осциллятора при $b \rightarrow +\infty$ от $\tilde{\epsilon}$, построенная для функции взаимодействия f_1 при $\Lambda = 0.0256$, $M = 0.2$, $\omega = 0.6$.

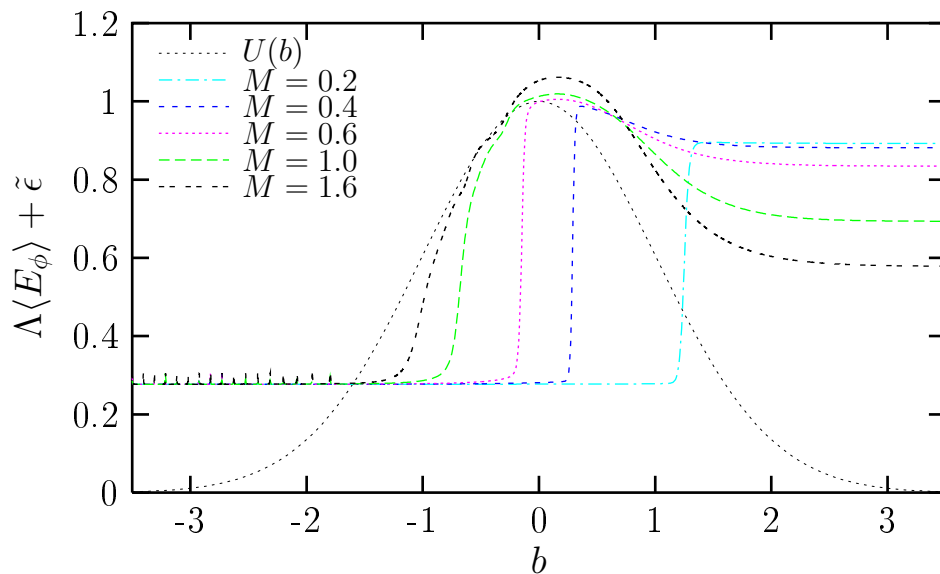


Рис. 4.4. Зависимость средней энергии материи от масштабного фактора b , построенная при разных значениях параметра M ; функция взаимодействия f_3 , $\Lambda = 0.0225$, $\omega = 0.6$, $\tilde{\epsilon} = 0.27$.

4.3 Предел $\Lambda \rightarrow 0$

Посмотрим, что происходит с решением уравнения Уилера—Де Витта в пределе $\Lambda \rightarrow 0$. Как уже упоминалось, этот предел в нашей модели соответствует «квазиклассическому» пределу, так как Λ входит в уравнение Уилера—Де Витта как множитель перед старшей производной. Определим аналог экспоненты подавления⁴ для модели (4.1):

$$e^{-\frac{F}{\Lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \Big|_{b \rightarrow +\infty}. \quad (4.19)$$

Численно мы обнаружили, что существует предел экспоненты подавления при $\Lambda \rightarrow 0$, т.е. при малых Λ формально выполнена квазиклассическая формула для «вероятности туннелирования» (см. рис. 4.5). Заметим, что при малых Λ получаемое значение намного превышает наивную квазиклассическую экспоненту

$$e^{-\int_{a_1}^{a_2} da \sqrt{2(V(a)-\epsilon)}}, \quad (4.20)$$

которая соответствует случаю, когда возбуждение материальных степеней свободы при туннелировании не происходит. Таким образом, процесс рождения частиц оказывает сильное влияние на величину волновой функции в области за барьером.

В заключение заметим, что, в принципе, может существовать определенная процедура квазиклассического вычисления вероятности туннелирования (4.19) и средней энергии (4.17) при малых Λ . Однако, мы так и не смогли найти комплексную траекторию, описывающую процесс катастрофического рождения частиц при туннелировании в квантовой космологии.

⁴Вероятностная интерпретация волновой функции вселенной является предметом множества дискуссий. Мы рассматриваем величину (4.19) как формальную характеристику решения.

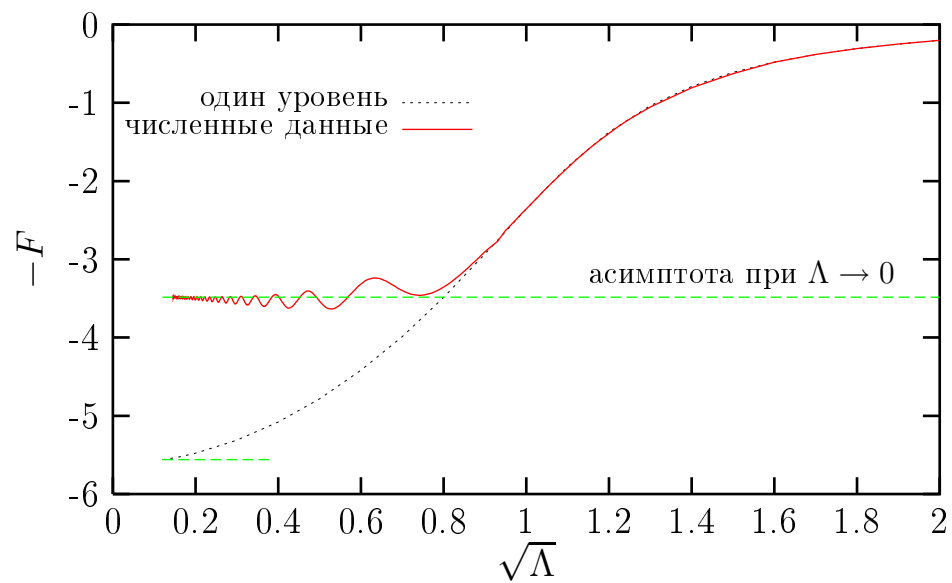


Рис. 4.5. Зависимость величины волновой функции после прохождения барьера от параметра $\sqrt{\Lambda}$. «Экспонента подавления» F определена формулой (4.19). Пунктирная линия соответствует неправильному результату (4.20). Функция взаимодействия и значения параметров модели взяты теми же, что и при построении рис. 4.4.

Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации.

1. Сформулирован и обоснован метод регуляризации квазиклассической краевой задачи, позволяющий получать физически значимые решения вблизи точек бифуркации, где ветвь решений, описывающих переходы системы через потенциальный барьер, пересекается с ветвью отражающихся решений. Показано, что все решения регуляризованной задачи соответствуют переходам на другую сторону потенциального барьера, а физически значимые решения исходной задачи восстанавливаются в пределе, когда параметр регуляризации стремится к нулю. Достоинством метода является простота численной реализации, что позволяет получать правильные квазиклассические решения в сложных системах.
2. С помощью метода регуляризации решена квазиклассически задача о неупругих переходах связанной системы через потенциальный барьер в квантовомеханической модели с двумя степенями свободы. Экспонента подавления процесса перехода получена для всех начальных состояний системы, переход из которых экспоненциально подавлен (включая состояния, полная энергия которых превышает высоту барьера). С целью проверки метода проведено явное сравнение вычисленной квазиклассически экспоненты подавления с «точной» экспонентой, полученной в результате численного решения уравнения Шредингера. Совпадение результатов подтверждает правильность метода.
3. На примере модели скалярного поля с локализованным на границе пространства взаимодействием проведен квазиклассический расчет экспоненты подавления процесса индуцированного туннелирования при всех энергиях столкновения. Показано, что решения квазиклассической T/θ задачи образуют две ветви, соответствующие случаям прямого туннелирования при низких энергиях и туннелирования с образованием состо-

яния около вершины потенциального барьера (сфалерона) при энергиях, превышающих некоторое критическое значение E_c (которое в свою очередь превышает энергию сфалерона). Показано, что решения квазиклассической T/θ задачи соответствуют переходам с энергиями, не превышающими некоторого оптимального значения $E_o > E_c$; при $E > E_o$ инклюзивный процесс индуцированного перехода через потенциальный барьер не может быть описан квазиклассически.

4. Предложен общий квазиклассический метод расчета минимального значения экспоненты подавления процесса индуцированного туннелирования и оптимальной энергии E_o , при которой это значение достигается. Метод основан на получении «инстантонов действительного времени» — нового класса комплексных решений, удовлетворяющих определенной квазиклассической краевой задаче. Показано, что экспонента подавления остается постоянной при $E > E_o$. Метод применен для расчета экспоненты подавления в теоретико-полевой модели, для которой показано, что процесс индуцированного туннелирования остается экспоненциально подавлен при всех энергиях.
5. Показано, что при энергиях столкновения, превышающих оптимальную энергию E_o , процесс индуцированного перехода полевой системы через потенциальный барьер происходит следующим образом: полевая система освобождает избыток энергии $(E - E_o)$, испуская несколько высокоэнергичных частиц, а затем туннелирует на вершину барьера (сфалерон) с энергией, эффективно равной оптимальной энергии E_o . Процесс завершается распадом сфалеронного состояния.
6. Показано, что при туннельном рождении замкнутой вселенной, заполненной массивным скалярным полем с конформной связью, происходит катастрофическое рождение частиц материи. Результаты получены численно с помощью решения уравнения Уилера—Де Витта для модели минусуперпространства. Показано, что в широком диапазоне значений

параметров модели полная энергия рожденных частиц примерно равна высоте потенциального барьера.

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю благодарность научному руководителю В. А. Рубакову за постоянное внимание к работе и критические замечания. Автор благодарен Ф. Б. Безрукову, К. Ребби, П. Г. Тинякову, С. М. Сибирякову за плодотворное сотрудничество и ценные обсуждения на разных этапах работы, а также всем сотрудникам и аспирантам ИЯИ РАН за творческую атмосферу и доброжелательность.

Приложение А

Регуляризация классических надбарьерных решений в квантовой механике одной степени свободы

Трудности, связанные с бифуркацией квазиклассических решений, возникают в довольно широком классе задач. Продемонстрируем это на примере одномерной квантовомеханической модели, где вероятность туннелирования может быть вычислена по известной формуле ВКБ. Убедимся, что в одномерном случае техника регуляризации позволяет соединить ветви туннельных и классических надбарьерных решений.

Вычислим экспоненту подавления процесса перехода одномерной частицы через потенциальный барьер $U(X)$, разделяющий две асимптотические области $X \rightarrow \pm\infty$. Для нахождения соответствующей комплексной траектории (см., к примеру, [71]) следует найти решение классических уравнений движения

$$\frac{\delta S}{\delta X(t)} = 0$$

вдоль контура $ABCD$ в плоскости комплексного времени (рис. 1), с условиями действительности наложенными в асимптотических будущем и прошлом (области A и D). Дополнительный параметр T (высота контура) определяется из условия, что классическая энергия решения равна E . Экспонента подавления процесса вычисляется по формуле

$$F = 2\text{Im}S - 2ET . \tag{A.1}$$

Заметим, что приведенные выше краевые условия похожи на условия, накладываемые на туннельную координату в двумерной модели. Легко показать (см., к примеру, [67]), что если энергия E не превышает высоту потенциального барьера, результат (A.1) эквивалентен стандартной ВКБ формуле.

Очевидно, что решения, соответствующие классически запрещенным и классически разрешенным переходам, принадлежат к разным ветвям. Если

энергия системы не превышает высоты потенциального барьера E_s , контур $ABCD$ может быть выбран так, что точки B и C соответствуют точкам поворота решения, $\dot{X} = 0$. В этом случае решение на отрезке BC контура описывает колебания в перевернутом потенциале с периодом $2T$. При приближении энергии к высоте потенциального барьера E_s , амплитуда колебаний в перевернутом потенциале уменьшается, а период $2T$ стремится к конечному значению, определяемому кривизной потенциала вблизи его вершины. С другой стороны, решения с $E > E_s$ соответствуют движению вдоль действительной оси, $T = 0$. Следовательно, две ветви физически значимых решений не соединяются при $E = E_s$, а параметр $T(E) = -\partial F/\partial(2E)$ испытывает скачок. Техника регуляризации раздела 1.5 позволяет соединить правильные ветви решений.

Рассмотрим точно решаемую модель с потенциалом

$$U(X) = \frac{1}{\text{ch}^2 X}.$$

Согласно методике раздела 1.5, модифицируем потенциал

$$U(X) \rightarrow e^{-i\epsilon} U(X), \quad (\text{A.2})$$

что приводит к соответствующему изменению уравнений движения. Здесь параметр регуляризации ϵ исчезающе мал.

Мы не изменяем краевые условия регуляризованной задачи, т.е. требуем, чтобы координата $X(t)$ было действительна в областях A и D контура. Тогда энергия решения также действительна. Энергия сфалеронного решения $X(t) = 0$ теперь, однако, комплексна, поэтому решения регуляризованной задачи не могут стремиться к сфалерону при $t \rightarrow +\infty$.

Запишем общее решение регуляризованной задачи в виде

$$\sqrt{\frac{E}{e^{-i\epsilon} - E}} \text{sh} X = -\text{ch} \left(\sqrt{2E}(t - t_0) \right),$$

где t_0 — константа интегрирования. Значение $\text{Im} t_0$ фиксируется требованием

действительности $\text{Im}X = 0$ при $t \rightarrow +\infty$,

$$\text{Im}t_0 = T - \frac{1}{2\sqrt{2E}} \arg[e^{-i\epsilon} - E] .$$

Оставшийся параметр, Ret_0 , соответствует инвариантности относительно временных сдвигов, которая всегда присутствует в подобных задачах. С помощью условия действительности координаты X в части A контура получаем связь между T и E :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2E}} \{ \pi + \arg(e^{-i\epsilon} - E) \} . \quad (\text{A.3})$$

Посмотрим, что происходит с регуляризованным решением в окрестности точки $E = E_s \equiv 1$. Из уравнения (A.3) видно, что теперь $T(E)$ — гладкая функция. Вдали от $E = 1$ уравнение (A.3) может быть записано в виде

$$T = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{2E}} & \text{при } 1 - E \gg \epsilon , \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{2E}(E - 1)} & \text{при } E - 1 \gg \epsilon . \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Для глубоко туннельных переходов, $1 - E \gg \epsilon$, фаза величины $(e^{-i\epsilon} - E)$ близка к нулю, и мы получаем туннельный ответ. Когда энергия пересекает область размера порядка ϵ вблизи $E = 1$, эта фаза быстро меняется от $O(\epsilon)$ до $-\pi + O(\epsilon)$, так что T гладко меняется от $\pi/\sqrt{2}$ почти до нуля. Таким образом, при $E > 1$ мы приходим к решению, которое близко к классическому надбарьерному решению, а контур становится близок к действительной оси. Это видно на рисунке 1.8. Мы видим, что при $\epsilon \neq 0$ классические надбарьерные решения гладко соединены с подбарьерными.

Посмотрим, что происходит с решениями в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ при $E \geq E_s$. Из уравнения (A.4) видно, что предел, взятый при постоянном конечном T , приводит к решению с $E = E_s \equiv 1$. Классические надбарьерные решения с $E > E_s \equiv 1$ получаются в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, если при этом T стремится к нулю, а $\tau = T/\epsilon$ остается постоянным. Разные энергии соответствуют разным значениям параметра τ .

Приложение В

Периодические инстантоны при ненулевой массе в модели скалярного поля со взаимодействием на границе

Выясним, какое влияние оказывает ненулевая масса m на найденные в разделе 2.3 периодические инстантоны. Будем полагать, что масса мала, $mT \ll 1$, $m/\mu \ll 1$. В области $|t| \ll 1/m$ приближенное решение $\phi_m(t, x)$ может быть записано в виде

$$\phi_m(t, x) = \phi_0(t, x)e^{-mx}, \quad (\text{В.1})$$

где $\phi_0(t, x)$ — решение (2.9), (2.20) уравнений в безмассовом случае. Легко проверить, что конфигурация (В.1) удовлетворяет уравнениям поля (2.4а), (2.4б) с точностью до поправок порядка $O(mT)$. При $|t| \gg T$ значение поля на пространственной границе $x = 0$ приближенно равно 0 и 2π в областях A и D контура $ABCD$ (см. рис. (1)). Рассмотрим начальную часть контура; положим $t = t' + iT$. В области $T \ll |t'| \ll 1/m$, решение (В.1) должно быть склеено с решением свободного уравнения Калуцы–Кляйна, имеющего вид (2.4д). Используя формулу (2.23), получим образ Фурье функции (В.1):

$$\phi_m(t', x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k - im} \cdot \frac{-ie^{ikx_0}}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{kT}{2}\right)} e^{ik(t'+x)}, \quad T \ll |t'| \ll \frac{1}{m},$$

где опущены члены, исчезающие в пределе $m \rightarrow 0$. Сопоставим это выражение с уравнением (2.4д), получим:

$$f_k = \theta(-k) \frac{-i\sqrt{\pi\omega_k} e^{ikx_0}}{(k - im) \operatorname{ch}\left(\frac{kT}{2}\right)},$$

$$g_k^* = \theta(-k) \frac{-i\sqrt{\pi\omega_k} e^{-ikx_0}}{(-k - im) \operatorname{ch}\left(\frac{kT}{2}\right)}.$$

Теперь энергия и число частиц могут быть вычислены по формулам (2.5). Легко видеть, что с точностью до поправок порядка $O(mT)$ энергия вычисляется по той же формуле (2.21), что и в безмассовом случае. Для числа

частиц получаем:

$$N = \int_0^\infty \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + m^2} \operatorname{ch}^2\left(\frac{kT}{2}\right)} dk = -\pi \ln(mT) + O(1) .$$

Мы видим, что включение ненулевой массы регуляризует начальное число частиц, которое логарифмически расходится в пределе $m \rightarrow 0$. Чтобы обнаружить эффект, оказываемый массой на значение функционала действия, проинтегрируем выражение (2.7) по частям:

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} \phi \partial_x \phi - \mu(1 - \cos \phi) \right) \Big|_{x=0} .$$

Из приведенных выше рассуждений ясно, что подынтегральное выражение локализовано в области $t \sim T \ll 1/m$. Таким образом, подстановка выражения (B.1) в последнюю формулу приведет к значению действия, отличие которого от безмассового значения исчезает в пределе $m \rightarrow 0$. Мы приходим к выводу, что влияние маленькой массы на экспоненту подавления процесса, описываемого периодическим инстантоном, мало при $E \gg m$.

Литература

1. В. П. Маслов, М. В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений классической механики. -М: Наука, 1976.
2. Z. Huang, T. Feuchtwang, P. Cutler, E. Kazes. Wentzel–Kramers–Brillouin method in multidimensional tunneling // -Phys. Rev. -1990. -A41. -p.32.
3. S. Takada, H. Nakamura. Wentzel–Kramers–Brillouin theory of multidimensional tunneling: General theory for energy splitting // -J. Chem. Phys. -1994. -100. -p.98.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. -4-е издание. -М.: Наука, 1989.
5. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев. Ионизация атомов в переменном электрическом поле // -ЖЭТФ. -1966. -50. -С.1393.
6. В. С. Попов, В. Т. Кузнецов, А. М. Переломов. Квазиклассическое приближение для нестационарных задач // -ЖЭТФ. -1967. -53. -С.331.
7. W. Miller. Classical S–matrix: Numerical application to inelastic collisions // -J. Chem. Phys. -1970. -53. -p.3578.
8. W. Miller, T. George. Semiclassical Theory of Electronic Transitions in Low Energy Atomic and Molecular Collisions Involving Several Nuclear Degrees of Freedom // -J. Chem. Phys. -1972. -56. -p.5637.
9. T. George, W. Miller. Classical S–matrix Theory of Reactive Tunneling: Linear $H + H_2$ Collisions // -J. Chem. Phys. -1972. -57. -p.2458.
10. W. Miller. Classical–limit quantum mechanics and the theory of molecular collisions // -Adv. Chem. Phys. -1974. -25. -p.69.
11. M. Wilkinson. Tunneling between tori in phase space // -Physica. -1986. -21D. -p.341.
12. M. Wilkinson, J. Hannay. Multidimensional tunneling between excited states // -Physica. -1987. -27D. -p.201.

13. S. Takada. Multidimensional tunneling in terms of complex classical mechanics: Wave functions, energy splittings, and decay rates of nonintegrable systems // -J. Chem. Phys. -1996. -104. -p.3742.
14. S. Takada, P. Walker, M. Wilkinson. Transfer-matrix approach to tunneling between Kolmogorov- Arnold- Moser tori // -Phys. Rev. -1995. -A52. -p.3546.
15. G. F. Bonini, A. G. Cohen, C. Rebbi, V. A. Rubakov. Tunneling of bound systems at finite energies: Complex paths through potential barriers // -quant-ph/9901062.
16. G. F. Bonini, A. G. Cohen, C. Rebbi, V. A. Rubakov. The semiclassical description of tunneling in scattering with multiple degrees of freedom // -Phys. Rev. -1999. -D60. -p.076004.
17. N. Makri, W. Miller. Monte Carlo path integration for the real time propagator // -J. Chem. Phys. -1988. -89. -p.2170.
18. K. Thompson, N. Makri. Influence functionals with semiclassical propagators in combined forward- backward time // -J.Chem.Phys. -1999. -110. -p.1343.
19. K. Kay. Semiclassical tunneling in the initial value representation // -J.Chem.Phys. -1997. -107. -p.2313.
20. N. Maitra, E. Heller. Barrier tunneling and reflection in the time and energy domains: The battle of the exponentials // -Phys.Rev.Lett. -1997. -78. -p.3035.
21. W. Miller. The semiclassical initial value representation: A potentially practical way for adding quantum effects to classical molecular dynamics simulations // -J. Phys. Chem. -2001. -A105. -p.2942.
22. M. B. Voloshin, I. Y. Kobzarev, L. B. Okun. Bubbles in metastable vacuum // -Sov. J. Nucl. Phys. -1975. -20. -p.644-646.
23. S. Coleman. The fate of the false vacuum. 1. Semiclassical theory // -Phys. Rev. -1977. -D15. -p.2929-2936.

24. S. R. Coleman. The uses of instantons // *Erice Subnucl.* -1977.
25. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts, Y. S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations // *-Phys. Lett.* -1975. -B59. -p.85–87.
26. R. Jackiw, C. Rebbi. Vacuum periodicity in a Yang–Mills quantum theory // *-Phys. Rev. Lett.* -1976. -37. -p.172–175.
27. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М.А. Шифман. Инстантонная азбука // *-УФН.* -1982. -136. -С.553–591.
28. N. S. Manton. Topology in the Weinberg–Salam theory // *-Phys. Rev.* -1983. -D28. -p.2019.
29. F. R. Klinkhamer, N. S. Manton. A saddle point solution in the Weinberg–Salam theory // *-Phys. Rev.* -1984. -D30. -p.2212.
30. A. H. Guth. The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems // *-Phys. Rev.* -1981. -D23. -p.347–356.
31. V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. On the anomalous electroweak baryon number nonconservation in the early universe // *-Phys. Lett.* -1985. -155B. -p.36.
32. P. Arnold, L. McLerran. Sphalerons, small fluctuations and baryon number violation in electroweak theory // *-Phys. Rev.* -1987. -D36. -p.581.
33. P. Arnold, L. McLerran. The sphaleron strikes back // *-Phys. Rev.* -1988. -D37. -p.1020.
34. A. I. Bochkarev, M. E. Shaposhnikov. Anomalous fermion number nonconservation at high temperatures: Two–dimensional example // *-Mod. Phys. Lett.* -1987. -A2. -p.991.
35. S. Y. Khlebnikov, M. E. Shaposhnikov. The statistical theory of anomalous fermion number nonconservation // *-Nucl. Phys.* -1988. -B308. -p.885–912.
36. A. N. Kuznetsov, P. G. Tinyakov. Periodic instanton bifurcations and thermal transition rate // *-Phys. Lett.* -1997. -B406. -p.76–82.

37. K. L. Frost, L. G. Yaffe. From instantons to sphalerons: Time-dependent periodic solutions of SU(2)-Higgs theory // -Phys. Rev. -1999. -D60. -p.105021.
38. G. F. Bonini, S. Habib, E. Mottola, C. Rebbi, R. Singleton, P. G. Tinyakov. Periodic instantons in SU(2) Yang-Mills-Higgs theory // Copenhagen 1998, Strong and electroweak matter. -1999. -p. 173–182.
39. V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze. Stable anomalous states of superdense matter in gauge theories // -Phys. Lett. -1985. -B165. -p.109–112.
40. V. A. Rubakov. On the electroweak theory at high fermion density // -Prog. Theor. Phys. -1986. -75. -p.366.
41. В. А. Матвеев, В. А. Рубаков, А. Н. Тавхелидзе, В. Ф. Токарев. Несохранение фермионных чисел в холодной и плотной фермионной среде в V-A калибровочных теориях // -ТМФ. -1986. -69. -С.961–976.
42. V. A. Matveev, V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze, V. F. Tokarev. Fermion number nonconservation and cold neutral fermionic matter in (V-A) gauge theories // -Nucl. Phys. -1987. -B282. -p.700–726.
43. D. Diakonov, V. Y. Petrov. Instability of dense baryon matter and baryon number nonconservation at high-energies // -Phys. Lett. -1992. -B275. -p.459–464.
44. V. A. Rubakov. Electroweak nonconservation of the baryon number in the decay of heavy particles // -JETP Lett. -1985. -41. -p.266–268.
45. J. Ambjorn, V. A. Rubakov. Classical versus semiclassical electroweak decay of a techniskyrmion // -Nucl. Phys. -1985. -B256. -p.434.
46. V. A. Rubakov, B. E. Stern, P. G. Tinyakov. On the electroweak decay of a technibaryon in the soliton model // -Phys. Lett. -1985. -160B. -p.292.
47. C. G. Callan, R. F. Dashen, D. J. Gross. The structure of the gauge theory vacuum // -Phys. Lett. -1976. -B63. -p.334–340.

48. G. 't Hooft. Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies // -Phys. Rev. Lett. -1976. -37. -p.8–11.
49. G. 't Hooft. Computation of the quantum effects due to a four- dimensional pseudoparticle // -Phys. Rev. -1976. -D14. -p.3432–3450. erratum: *ibid.*, -1978, -D18. -p.2199.
50. A. Ringwald. High-energy breakdown of perturbation theory in the electroweak instanton sector // -Nucl. Phys. -1990. -B330. -p.1.
51. O. Espinosa. High-energy behavior of baryon and lepton number violating scattering amplitudes and breakdown of unitarity in the standard model // -Nucl. Phys. -1990. -B343. -p.310–340.
52. L. McLerran, A. Vainshtein, M. Voloshin. Electroweak interactions become strong at energy above approximately 10-TeV // -Phys. Rev. -1990. -D42. -p.171–179.
53. S. Y. Khlebnikov, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov. Instanton induced cross-sections below the sphaleron // -Nucl. Phys. -1991. -B350. -p.441–473.
54. L. G. Yaffe. Scattering amplitudes in instanton backgrounds // Santa Fe Workshop on Baryon Violation at the SSC, Santa Fe, NM, Apr 27-30, 1990. -1990. -p. 46–63.
55. P. B. Arnold, M. P. Mattis. Baryon violation at the SSC? Recent claims reexamined // -Phys. Rev. -1990. -D42. -p.1738–1743.
56. M. P. Mattis. The riddle of high-energy baryon number violation // -Phys. Rept. -1992. -214. -p.159–221.
57. P. G. Tinyakov. Instanton like transitions in high-energy collisions // -Int. J. Mod. Phys. -1993. -A8. -p.1823–1886.
58. V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. Electroweak baryon number non-conservation in the early universe and in high-energy collisions // -Usp. Fiz. Nauk. -1996. -166. -p.493–537.

59. V. A. Rubakov, D. T. Son. Instanton-like transitions at high-energies in $(1+1)$ -dimensional scalar models. 2. Classically allowed induced vacuum decay // -Nucl. Phys. B. -1994. -424. -p.55.
60. C. Rebbi, R. Singleton. Numerical studies of instanton induced baryon decay // -Nucl. Phys. Proc. Suppl. -1995. -42. -p.587.
61. V. I. Zakharov. Unitarity constraints on multiparticle weak production // -Nucl. Phys. -1991. -B353. -p.683-688.
62. G. Veneziano. Bound on reliable one instanton cross-sections // -Mod. Phys. Lett. -1992. -A7. -p.1661-1666.
63. M. Maggiore, M. A. Shifman. Nonperturbative processes at high-energies in weakly coupled theories: Multi - instantons set an early limit // -Nucl. Phys. -1992. -B371. -p.177-190.
64. V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov. Towards the semiclassical calculability of high-energy instanton cross-sections // -Phys. Lett. -1992. -B279. -p.165-168.
65. P. G. Tinyakov. Multiparticle instanton induced processes and B violation in high-energy collisions // -Phys. Lett. -1992. -B284. -p.410-416.
66. V. A. Rubakov, D. T. Son, P. G. Tinyakov. Classical boundary value problem for instanton transitions at high-energies // -Phys. Lett. -1992. -B287. -p.342.
67. A. N. Kuznetsov, P. G. Tinyakov. False vacuum decay induced by particle collisions // -Phys. Rev. -1997. -D56. -p.1156-1169.
68. V. A. Rubakov, D. T. Son, P. G. Tinyakov. Initial state independence of nonperturbative scattering through thin wall bubbles in $(1+1)$ -dimensions // -Phys. Lett. -1992. -B278. -p.279.
69. V. A. Rubakov, D. T. Son, P. G. Tinyakov. An example of semiclassical instanton like scattering: $(1+1)$ -dimensional sigma model // -Nucl. Phys. -1993. -B404. -p.65-90.

70. A. H. Mueller. Comparing two particle and multiparticle initiated processes in the one instanton sector // -Nucl. Phys. -1993. -B401. -p.93–115.
71. F. Bezrukov, D. Levkov. Transmission through a potential barrier in quantum mechanics of multiple degrees of freedom: Complex way to the top // -quant-ph/0301022.
72. F. Bezrukov, D. Levkov. Dynamical tunneling of bound systems through a potential barrier: complex way to the top // -ЖЭТФ. -2004. -125. -С.938–955.
73. S. Y. Khlebnikov, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov. Periodic instantons and scattering amplitudes // -Nucl. Phys. -1991. -B367. -p.334.
74. D. T. Son, V. A. Rubakov. Instanton - like transitions at high-energies in (1+1)- dimensional scalar models // -Nucl. Phys. -1994. -B422. -p.195–226.
75. Ф. Безруков, Д. Левков. θ инстантоны в теории $SU(2)$ с механизмом Хиггса // -ТМФ. -2004. -138(3). -С.397–406.
76. A. N. Kuznetsov, P. G. Tinyakov. Numerical study of induced false vacuum decay at high energies // -Mod. Phys. Lett. -1996. -A11. -p.479–490.
77. F. Bezrukov, C. Rebbi, V. A. Rubakov, P. Tinyakov. Instanton-like processes in particle collisions: A numerical study of the $SU(2)$ -Higgs theory below the sphaleron energy // -hep-ph/0110109.
78. M. Davis, E. Heller. Quantum dynamical tunneling in bound states // -J.Chem.Phys. -1981. -75. -p.246.
79. F. Bezrukov, D. Levkov, C. Rebbi, V. Rubakov, P. Tinyakov. Semiclassical study of baryon and lepton number violation in high-energy electroweak collisions // -Phys. Rev. -2003. -D68. -p.036005.
80. T. Banks, G. Farrar, M. Dine, D. Karabali, B. Sakita. Weak interactions are weak at high-energies // -Nucl. Phys. -1990. -B347. -p.581–595.
81. V. I. Zakharov. High-energy production of scalar bosons in weak coupling theories // -Phys. Rev. Lett. -1991. -67. -p.3650–3653.

82. V. A. Rubakov. Non-perturbative aspects of multiparticle production // Proc. of the 2nd Rencontres du Vietnam, Hô Chi Minh City, Vietnam. -Gif-sur-Yvette: Editions Frontieres. -1995. -p. 435–448.
83. F. L. Bezrukov, D. G. Levkov. Transmission of Bound Systems Through a Potential Barrier: Complex Way to the Top // Труды 12-й международной школы «Частицы и космология», Приэльбрусье. -2004. -С. 173–188.
84. F. Bezrukov, D. Levkov, C. Rebbi, V. Rubakov, P. Tinyakov. Suppression of baryon number violation in electroweak collisions: Numerical results // -Phys. Lett. -2003. -B574. -p.75–81.
85. D. G. Levkov, S. M. Sibiryakov. Induced tunneling in QFT: Soliton creation in collisions of highly energetic particles // -Phys. Rev. -2005. -D71. -p.025001.
86. D. Levkov, S. Sibiryakov. Real-time instantons and suppression of collision-induced tunneling // -Письма в ЖЭТФ. -2005. -81. -С.60–64.
87. M. B. Voloshin. Catalyzed decay of false vacuum in four-dimensions // -Phys. Rev. -1994. -D49. -p.2014–2018.
88. A. Vilenkin. Creation of universes from nothing // -Phys. Lett. -1982. -B117. -p.25.
89. A. Vilenkin. Quantum creation of universes // -Phys. Rev. -1984. -D30. -p.509–511.
90. L. P. Grishchuk, Y. B. Zeldovich. Complete cosmological theories // M. Duff, C. Isham, editors, Quantum Structure of Space and Time. -Cambridge Univ. Press. -1982. -p. 409–422.
91. A. D. Linde. Quantum creation of the inflationary universe // -Nuovo Cim. Lett. -1984. -39. -p.401–405.
92. V. A. Rubakov. Quantum mechanics in the tunneling universe // -Phys. Lett. -1984. -B148. -p.280–286.

93. A. Vilenkin. Boundary conditions in quantum cosmology // -Phys. Rev. -1986. -D33. -p.3560.
94. D. Levkov, C. Rebbi, V. A. Rubakov. Tunneling in quantum cosmology: Numerical study of particle creation // -Phys. Rev. -2002. -D66. -p.083516.
95. D. G. Levkov, S. M. Sibiryakov. Soliton production in high-energy collisions: A toy model // Труды 13-го международного семинара «Кварки-2004», Пушкинские горы. -2005. -С. 59-79.
96. C. Rebbi, R. Singleton. Computational study of baryon number violation in high- energy electroweak collisions // -Phys. Rev. -1996. -D54. -p.1020-1043.
97. C. L. Kane, M. P. A. Fisher. Transport in a one-channel Luttinger liquid // -Phys. Rev. Lett. -1992. -68. -p.1220.
98. R. Fazio, K. H. Wagenblast, C. Winkelholza, G. Schön. Tunneling into one-dimensional Josephson chains and Luttinger liquids // -Physica. -1996. -B222. -p.364.
99. C. G. Callan, I. R. Klebanov. Exact $C = 1$ boundary conformal field theories // -Phys. Rev. Lett. -1994. -72. -p.1968-1971.
100. C. G. Callan, I. R. Klebanov, A. W. W. Ludwig, J. M. Maldacena. Exact solution of a boundary conformal field theory // -Nucl. Phys. -1994. -B422. -p.417-448.
101. J. Polchinski, L. Thorlacius. Free fermion representation of a boundary conformal field theory // -Phys. Rev. -1994. -D50. -p.622-626.
102. P. Fendley, H. Saleur, N. P. Warner. Exact solution of a massless scalar field with a relevant boundary interaction // -Nucl. Phys. -1994. -B430. -p.577-596.
103. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. -М: Физматгиз, 1963.
104. C. Rebbi, J. Singleton, Robert. Numerical approaches to high energy electroweak baryon number violation above and below the sphaleron barrier // Trieste 1996, High energy physics and cosmology. -1996. -p. 479-522.

105. V. A. Rubakov, D. T. Son, P. G. Tinyakov. An example of semiclassical instanton like scattering: (1+1)-dimensional sigma model // -Nucl. Phys. -1993. -B404. -p.65–90.
106. B. S. DeWitt. Quantum theory of gravity. 1. The canonical theory // -Phys. Rev. -1967. -160. -p.1113–1148.
107. J. B. Hartle, S. W. Hawking. Wave function of the universe // -Phys. Rev. -1983. -D28. -p.2960–2975.
108. A. Strominger. A Lorentzian analysis of the cosmological constant problem // -Nucl. Phys. -1989. -B319. -p.722.
109. V. A. Rubakov. Quantum cosmology // Structure Formation in the Universe. -1999. -p. 59–79.