Задачи к зачету, экзамену по спецкурсу
"Классические калибровочные поля"
(декабрь 2009)

1. Уравнение Клейна-Гордона в поле монополя.
Пусть $A_i^a(\mathbf{x})$, $\phi^a(\mathbf{x})$ — классическое поле монополя в $SU(2)$–модели, рассмотренное на лекции. Введем в теорию еще одно скалярное поле $\xi(x)$ — дублет относительно калибровочной группы $SU(2)$ — с лагранжианом

$$\mathcal{L}_\xi = (D_\mu \xi)^\dagger (D_\mu \xi) - m^2 \xi^\dagger \xi \ ,$$

где $D_\mu \xi = (\partial_\mu - ig\frac{\tau^a}{2} A_\mu^a)\xi$, g — калибровочная константа связи.

1. Считая поле монополя внешним, записать уравнение для поля ξ (схематически это уравнение можно записать в виде $K\xi = 0$; требуется найти оператор K). Используя тот факт, что поле монополя инвариантно относительно пространственных вращений, дополненных калибровочными преобразованиями, найти аналог оператора углового момента (обычно $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, $\mathbf{p} = -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$), который коммутирует с оператором K. Найти явный вид низших "монопольных гармоник", т.е. собственных функций аналога углового момента с наименьшим собственным значением.

2. Рассматривая решения для поля ξ с фиксировнной энергией, $\xi = \mathrm{e}^{-iEx^0}\xi_E(\mathbf{x})$, записать систему радиальных уравнений для низших монопольных гармоник. Найти решение этой системы при $E \ll m_V, m_H$ (m_V и m_H — массы векторного и хиггсовского полей) вдали от ядра монополя, $r \gg m_V^{-1}, m_H^{-1}$.

2. Пересечение уровней в $(3+1)$-мерной модели.
Рассмотрим заряженные безмассовые фермионы в кубическом ящике большого размера L в (3+1)-мерном пространстве во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$, направленном вдоль оси z. Пусть на некоторое время τ на систему накладывается однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное вдоль оси z. Найти изменение чисел правых и левых фермионов. Связать это изменение с

$$\int F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\, d^4x \propto \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\, d^4x,$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$. Считать, что включение и выключение поля производится адиабатически, но время переключений много меньше τ.

3. Модель $SU(5)$.
Рассмотрим теорию с калибровочной группой $SU(5)$.

1. Подобрать представление скалярных полей и скалярный потенциал так, чтобы $SU(5)$ нарушилась до $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, где $SU(3)$ и $SU(2)$ вложены в $SU(5)$ следующим образом:
$$\left(\begin{array}{c|c} SU(3) & 0 \\ \hline 0 & SU(2) \end{array}\right),$$
а группа $U(1)$ диагональна в $SU(5)$.

2. Найти массы векторных бозонов и их представления относительно ненарушенной калибровочной группы.

3. Скалярное поле в каком представлении $SU(5)$ нужно добавить, чтобы обеспечить дальнейшее нарушение до $SU(3) \times U(1)$, причем так, что $SU(2) \times U(1)$ нарушается до $U(1)$ аналогично стандартной модели? Подобрать полный скалярный потенциал для нарушения $SU(5) \to SU(3) \times U(1)$.

4. Отождествить поля материи Стандартной модели с мультиплетами группы $SU(5)$. Выписать лагранжиан взаимодействия в явно $SU(5)$–инвариантной форме. Является ли он наиболее общим калибровочно–инвариантным лагранжианом данной модели, не содержащим члены размерности выше m^4? Если нет, то найти наиболее общий. Определить глобальные симметрии наиболее общего лагранжиана.

4. Модель Пати–Салама.
Добавим в Стандартную модель по одному правому нейтрино для каждого поколения — синглеты по $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Тогда кварку каждого типа (аромата) соответствует один лептон, который можно рассматривать как четвертое цветное состояние того же кварка по группе $SU(4)_C$, нарушенной до $SU(3)_C$.

1. Подобрать представление хиггсовских полей и скалярный потенциал так, чтобы основное состояние нарушало $SU(4)_C$ до $SU(3)_C$.

2. При наличии правого нейтрино правые кварки и лептоны можно сгруппировать в дублеты по новой калибровочной группе $SU(2)_R$ (подобно тому, как левые являются дублетами по $SU(2)_L$). Подобрать представление хиггсовских полей и скалярный потенциал так, чтобы основное состояние нарушало $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ до $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

3. Скалярное поле в каком представлении $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ нужно добавить, чтобы обеспечить дальнейшее нарушение до $SU(3)_C \times U(1)$, причем так, что $SU(2)_L \times U(1)_Y$ нарушается до $U(1)$ аналогично Стандартной модели? Подобрать полный скалярный потенциал для нарушения
$$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(3) \times U(1).$$

4. Выписать лагранжиан взаимодействия полей материи в явно $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$–инвариантной форме. Является ли он наиболее общим калибровочно–инвариантным лагранжианом данной модели, не содержащим члены размерности выше m^4? Если нет, то найти наиболее общий. Определить глобальные симметрии наиболее общего лагранжиана.

5. Правила отбора в $(1+1)$-мерной модели.
Рассмотрим абелеву модель Хиггса в (1+1)-мерном пространстве–времени. Пусть имеется N сортов безмассовых фермионов ψ_i с зарядами — целыми числами q_i, то есть преобразующихся при калибровочном преобразовании $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$ по закону $\psi_i \to \psi_i' = \mathrm{e}^{iq_i\alpha(x)}\psi_i$. Наивно в этой модели сохраняются числа правых и левых фермионов каждого типа, $N_L^{(i)}$ и $N_R^{(i)}$. Найти все сохраняющиеся комбинации фермионных чисел с учетом инстантонов.

6. Распады Q-шаров.
Рассмотрим модель комплексного скалярного поля ϕ в $(3+1)$ измерениях,
$$\mathcal{L}_\phi = |\partial_\mu \phi|^2 - V(|\phi|),$$
где $V(\phi) \approx m^2|\phi|^2$ при $\phi \to 0$, $V(\phi) \to M^4$ при $|\phi| \to \infty$. Из-за сохранения заряда Q, связанного с группой $U(1)_Q$ глобальной симметрии ($\phi \to \mathrm{e}^{i\alpha}\phi$), эта теория допускает существование устойчивых Q-шаров. Включение других полей, заряженных по $U(1)_Q$, может повлиять на устойчивость этих решений.

1. Введем в модель дополнительное скалярное поле χ, заряженное по $U(1)_Q$ и взаимодействующее с ϕ:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi - m_\chi^2 \chi^2 - g|\phi\chi|^2,$$

   где g – константа. Как изменится условие устойчивости Q-шара в зависимости от массы m_χ? Изучить, в частности, случай $m_\chi \to 0$.

2. Рассмотрим теперь взаимодействие поля ϕ с безмассовыми фермионами ψ (заряд которого по $U(1)_Q$ равен $+1$) и η (не заряженным по $U(1)_Q$):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi - h\phi\bar{\psi}\eta,$$

   где h – константа. Что можно сказать об устойчивочти Q-шара в этом случае? Оценить максимальную скорость распада Q-шара в зависимости от его заряда. Если $M \approx 1$ ТэВ, то какой заряд должен иметь Q-шар, чтобы его время жизни было гарантированно дольше времени жизни Вселенной (15 миллиардов лет)?

7. Локализация фермионов на вихре.

1. Рассмотрим абелеву модель Хиггса в $(5+1)$-мерном пространстве Минковского. Теория допускает статические решения в виде вихрей в плоскости (x_4, x_5), не зависящие от (x_1, x_2, x_3). Введя взаимодействие с фермионами, аналогичное случаю сверхпроводящей струны в $(3+1)$, показать, что существуют нулевые фермионные моды, локализованные в пространстве (x_1, x_2, x_3). Являются ли они правыми (левыми) с точки зрения четырехмерной теории в пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3)?

2. Рассмотрим теперь абелеву модель Хиггса в пространстве $M_4 \times S_2$, где M_4 – это $(3+1)$-мерное пространство Минковского, а S_2 – двумерная сфера радиуса R. Обобщить конструкцию пункта 1 на случай вихря на сфере, изученного в задаче 9.

8. Вихри в неабелевой теории.
Рассмотрим в (1+1)–мерном пространстве–времени теорию с калибровочной группой $SU(2)$ и двумя полями материи $\phi_{1,2}$ в присоединенном представлении с потенциалом

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda\left((\phi_1^a\phi_1^a - v^2)^2 + (\phi_2^a\phi_2^a - v^2)^2 + (\phi_1^a\phi_2^a)^2\right),$$

где $\phi_{1,2}^a$, $a = 1, 2, 3$, – действительные компоненты.

1. Описать множество вакуумов, найти ненарушенную подгруппу.

2. Провести топологическую классификацию решений с конечной энергией.

3. Показать, что в модели имеются топологические солитоны. Подобрать подстановку для векторных и скалярных полей, приводящую уравнения движения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решением которой является солитон. Оценить энергию и размер солитона.

9. Фотон–парафотонные осцилляции.
Рассмотрим четырехмерную теорию двух абелевых векторных полей A_μ и B_μ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{\chi}{2}F_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - m^2 B_\mu^2,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Пусть имеется источник, испускающий j фотонов A_μ в секунду. Найти поток парафотонов B_μ на расстоянии x от источника в вакууме. Считать, что других источников фотонов и парафотонов в природе нет, и отдельно рассмотреть случаи направленного и сферически симметричного источника. Параметр смешивания $\chi \ll 1$, частота излучаемых фотонов $\omega \gg m$.

10. **Нетопологический солитон в теории с фермионами.**
Рассмотрим четырехмерную теорию одного действительного скалярного поля φ, взаимодействующего с N типами фермионов юкавским образом. Действие скалярного поля выберем в виде

$$S_\varphi = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - v^2)^2 \right] .$$

Предположим для простоты, что юкавские константы связи всех фермионов одинаковы, т.е. фермионное действие имеет вид

$$S_\psi = \int d^4x \sum_{i=1}^{N} \left(i\bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i - f\varphi\bar{\psi}_i\psi_i \right) .$$

Константы λ и f считаем малыми, но $\lambda \gg f^4$. Используя соображения, аналогичные приведенным на лекциях, показать, что при достаточно больших N в теории имеются нетопологические солитоны (например, такие, в которых число фермионов каждого типа равно 1). Оценить соответствующее минимальное значение N. Поляризацией вакуума (в том числе вкладом дираковского моря в полную энергию) пренебречь.

11. **Аксиальная симметрия и доменные стенки.**
Рассмотрим в (3+1) измерениях теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{32\pi^2} \theta F_{\mu\nu} \tilde{F_{\mu\nu}} + \bar{\psi} i \gamma_\mu D_\mu \psi - M\bar{\psi} \mathrm{e}^{i\gamma_5\theta} \psi + \frac{v^2}{2} \left(\partial_\mu \theta\right)^2 ,$$
$$\mathcal{L}_1 = -v^2 m^2 (1 - \cos\theta),$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_n u A_\mu$, $\tilde{F_{\mu\nu}} = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}$, A_μ – электромагнитное поле, ψ – фермионное поле, θ – скалярное поле.

1. Найти глобальные симметрии теории, а также глобальные симметрии теории с лагранжианом $\mathcal{L}_0$.

2. Выписать уравнения движения.

3. Найти множество вакуумов и провести их топологическую классификацию. Показать, что в теории имеются классические решения в виде доменных стенок. Найти доменную стенку в явном виде.

4. Изучить моды фермионного поля ψ во внешнем поле доменной стенки. Исследовать вопрос о локализации фермионных состояний на стенке. В тонкостенном пределе найти локализованные моды и написать для них эффективный (2+1)-мерный лагранжиан.