

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

---

На правах рукописи

**Безруков Федор Леонидович**

**Туннельные и многочастичные  
процессы в электрослабой  
теории и моделях теории поля**

**Специальность 01.04.02 — теоретическая физика**

*Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук*

Научные руководители:  
доктор физ.-мат. наук,  
академик  
В. А. Рубаков,  
профессор  
К. Ребби

---

Москва 2003

## Оглавление

Введение	4
Глава 1. Теория $SU(2)$ с хиггсовским дублетом: аналитические результаты	15
1.1 Обзор задачи туннелирования . . . . .	15
1.2 $\theta$ -инстантоны при низких энергиях . . . . .	30
1.3 Вероятность процессов инстантонного типа при низких энергиях	33
Глава 2. $SU(2)$ теория: численные результаты	39
2.1 Сведение к сферически симметричной задаче . . . . .	39
2.2 Разностная форма граничной задачи . . . . .	45
2.2.1 Дискретизация действия . . . . .	45
2.2.2 Граничный член: разложение по собственным модам . . . . .	48
2.2.3 Граничные условия. . . . .	51
2.3 Поиск решений . . . . .	58
2.4 Решения при энергиях, меньших сфалеронной . . . . .	59
2.4.1 Сравнение с аналитическим результатом . . . . .	61
2.5 Переход через энергию сфалерона . . . . .	65
2.6 Численные результаты . . . . .	72
2.7 Ограничения на сечения двухчастичных столкновений . . . . .	86
2.8 Оценка двухчастичных инстантонных сечений . . . . .	88
Глава 3. Многочастичные процессы в модели $\lambda\varphi^4$	92

3.1	Связь сингулярных решений с сечениями в древесном приближении. Общий формализм . . . . .	92
3.2	Разложение по сферическим модам . . . . .	98
3.3	Численное нахождение древесных сечений . . . . .	102
3.4	Сравнение численных и аналитических результатов . . . . .	107
	Заключение	110
	Приложение А. Алгоритм разбиений	112
	Литература	115

## Введение

Стандартная модель фундаментальных взаимодействий, являющаяся калибровочной теорией с группой  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , в настоящий момент с высокой точностью описывает большинство наблюдаемых процессов в физике частиц во всем доступном существующим экспериментам диапазоне энергий. Большинство результатов, используемых для описания реальных физических процессов при высоких энергиях, получено в ней в рамках теории возмущений по малой константе связи. Благодаря малости констант связи в электрослабом секторе, и свойству асимптотической свободы квантовой хромодинамики, теория возмущений отлично подходит для описания многих процессов. Однако даже в пределе слабой связи существуют эффекты, не описываемые в рамках теории возмущений.

Одним из таких эффектов является возможность несохранения фермионного (барионного и лептонного) числа в электрослабой теории. Этот эффект связан с нетривиальной структурой вакуума калибровочных теорий: неабелевы калибровочные теории обладают счетным множеством физически эквивалентных вакуумов [1–4]. В рамках теории возмущений существование различных вакуумов, и, соответственно, упомянутый эффект, незаметен. Однако, в полной квантовой теории возможны переходы между этими вакуумами, приводящие в теориях с фермионами при учете аномалии Адлера–Белла–Джекива [5–7] к несохранению фермионных чисел [3, 4].

Интересен вопрос, возможно ли наблюдать такие процессы экспериментально. В электрослабой теории соседние топологически различные вакуумы разделены потенциальным барьером конечной высоты [8, 9]. Клас-

сическое нестабильное решение статических уравнений движения, соответствующее вершине этого барьера (строго говоря, седловой точке между вакуумами), — сфалерон — имеет в стандартной электрослабой модели энергию  $E_{\text{sph}} \sim M_W/\alpha_W$ , или, при стандартных значениях параметров, около 8 ТэВ. При энергиях, много меньших высоты барьера, процессы, описывающие переходы с изменением топологического числа, хорошо описываются в квазиклассическом приближении, которое приводит в данном случае к теории возмущений вокруг классического непертурбативного решения в евклидовом времени, интерполирующего между соседними вакуумами — инстантона [10, 11]. Соответственно, вероятности туннелирования подавлены экспоненциальным фактором вида  $\exp(-2S_{\text{inst}})$ , где  $S_{\text{inst}}$  — евклидово действие инстантона.  $S_{\text{inst}}$  обратно пропорционально константе связи, и, следовательно, туннельные процессы сильно подавлены в теориях со слабой связью. В частности, в электрослабой теории действие инстантона  $S_{\text{inst}} = 4\pi/\alpha_W$ , что дает фактор подавления  $10^{-170}$ . Это приводит к тому, что при низких энергиях такие процессы практически ненаблюдаемы.

Квантовомеханическая интуиция, основывающаяся на известной задаче о туннелировании через барьер в одномерной квантовой механике, подсказывает, что подавление может пропасть при энергии, равной высоте барьера. Это действительно происходит в процессах при высокой температуре [12–20], большой плотности фермионов [21–25], или при наличии тяжелых фермионов в начальном состоянии [26–28].

Вообще говоря, высота барьера,  $E_{\text{sph}} \simeq 8$  ТэВ относительно невелика, и сравнима с энергиями, достижимыми на будущих ускорителях. В связи с этим встает вопрос, сохраняется ли экспоненциальное подавление процессов с нарушением фермионных чисел в столкновениях частиц при энер-

гиях, совпадающих с энергией сфалерона, и превышающих ее. В данной задаче одномерная квантовомеханическая аналогия перестает работать, из-за наличия у рассматриваемой системы, в дополнение к туннельной координате, внутренних степеней свободы. Другими словами, характерный размер полевой конфигурации сфалерона много больше длины волны сталкивающихся частиц, и даже при высокой энергии переход с изменением топологического числа затруднен. В то же время, применение квазиклассической техники в этой задаче осложнено существенной неквазиклассичностью начального состояния.

В работах [29, 30] было замечено, что при низких энергиях амплитуды процессов  $2 \rightarrow N$  с нарушением топологического числа могут быть найдены с помощью теории возмущений на фоне инстантона. Было получено, что эти амплитуды в ведущем порядке растут с энергией степенным образом, а инклюзивное сечение растет экспоненциально

$$\sigma_{\text{tot}} \sim \exp \left\{ \frac{4\pi}{\alpha_W} \left[ -1 + \text{const} \left( \frac{E}{E_{\text{sph}}} \right)^{4/3} \right] \right\},$$

причем насыщается конечным состоянием с большим (порядка  $1/\alpha_W$ ) числом частиц с относительно малыми энергиями [31–35]. Дальнейшие исследования [36–46] показали, что полное сечение имеет экспоненциальный вид

$$\sigma_{\text{tot}}(E) \sim \exp \left\{ -\frac{4\pi}{\alpha_W} F_{HG}(E/E_{\text{sph}}) \right\},$$

где  $\alpha_W$  — слабая константа связи, а функция  $F_{HG}$  выражается в виде ряда по дробным степеням  $E/E_{\text{sph}}$ , и зависит от константы связи только неявным образом через  $E_{\text{sph}}$  (см. также обзоры [47–49]). Предэкспоненциальный множитель зависит от константы связи и энергии степенным образом и, следовательно, относительно мало существенен. Ряд теории возмущений

на фоне инстантона для функции  $F_{HG}(E/E_{\text{sph}})$  взрывается при  $E \gtrsim E_{\text{sph}}$ , и, следовательно, анализ инстантонных процессов в самой интересной области высоких энергий требует применения непertурбативных методов<sup>1</sup>.

Экспоненциальная форма полного сечения предполагает, что может существовать квазиклассический метод вычисления  $F_{HG}(E/E_{\text{sph}})$  при любых энергиях, включая  $E \gtrsim E_{\text{sph}}$ . Однако, как уже было замечено, начальное состояние, содержащее две частицы, не является квазиклассическим. Метод решения этой проблемы был предложен в работах [50–53]. Метод основан на предположении об *универсальности* функции  $F_{HG}(E/E_{\text{sph}})$ , то есть о том, что она не зависит от деталей начального состояния, пока число частиц в нем не становится параметрически большим. Это предположение было проверено явными вычислениями в нескольких порядках теории возмущений по  $E/E_{\text{sph}}$  в калибровочной теории [51, 54] а также в явно в квантовой механике с двумя степенями свободы [55, 56]). Состояние же с несколькими частицами можно рассматривать как предельный случай квазиклассического состояния с числом частиц  $N = \tilde{N}/\alpha_W$ , при стремлении параметра  $\tilde{N}$  к нулю. Для многочастичного начального состояния инклюзивное сечение перехода с изменением топологического числа имеет явно квазиклассическую форму

$$\sigma(E, N) \sim \exp \left\{ -\frac{16\pi^2}{g^2} F(E/E_{\text{sph}}, \tilde{N}) \right\} .$$

Функция же  $F_{HG}(E/E_{\text{sph}})$ , отвечающая двухчастичному сечению, получается в пределе  $\tilde{N} \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\tilde{N} \rightarrow 0} F(E/E_{\text{sph}}, \tilde{N}) = F_{HG}(E/E_{\text{sph}}) . \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Функция  $F_{HG}$  в работе [47] была названа «функцией священного Грааля» из за многих безуспешных попыток найти ее.

Таким образом, можно косвенно вычислить функцию  $F_{HG}(E/E_{\text{sph}})$  квазиклассически.

В рамках этого метода функции  $F(E/E_{\text{sph}}, \tilde{N})$  определяется действием на специальном решении классических уравнений поля на контуре в комплексном времени [52]. Хотя для большинства реалистических моделей найти требуемые решения аналитически затруднительно (единственный результат такого типа был получен в работе [57] в 1+1-мерной модели с потенциалом вида «яма с обрывом»), возможно, по крайней мере в принципе, получить эти решения численно. Кроме этого, можно приближенно решить эту задачу в пределе малых энергий и числа частиц.

В работе [52] было показано, что при низких энергиях можно приблизить решение граничной задачи (будем называть его  $\theta$ -инстантоном) цепочкой инстантонов и антиинстантонов, соответственным образом модифицированных и помещенных в определенных местах на евклидовой оси времени. Хотя это приближение оправдано только при  $E \ll E_{\text{sph}}$ , приближенное решение такого вида дает общее представление о форме  $\theta$ -инстантонов во всей области  $E < E_{\text{sph}}$ . Такое решение было проанализировано в в случае ненулевых  $N$  в работе [58] (см. раздел 1.2 настоящей диссертации).

Возможность применения численных методов в данной задаче была продемонстрирована на примере модельной теории поля, описывающей распад ложного вакуума, в работах [53, 59]. Однако применение этого метода при высоких энергиях сталкивается с проблемой — решения граничной задачи, интерполирующие между различными топологическими вакуумами перестают существовать. Эта проблема была отмечена и при анализе распада ложного вакуума [53], и в модельной задаче квантовомеханического туннелирования в системе с двумя степенями свободы [56].

Следует также отметить, что в работе [60] приводится непertурбативный анализ классически разрешенных (надбарьерных) переходов с изменением топологического числа. Однако все решения, найденные в работе [60], являются конфигурациями с большим числом частиц в начальном состоянии, и не отвечают столкновению двух частиц.

В диссертации изучены топологические переходы в калибровочной теории с группой  $SU(2)$  и дублетом полей Хиггса. Эта модель соответствует бозонному сектору стандартной электрослабой модели при  $\theta_W = 0$ . Мы адаптировали квазиклассический метод нахождения вероятностей переходов с изменением топологического числа [50–53] для калибровочных теорий. При этом решается граничная задача для *комплексифицированных* классических уравнений поля на контуре в комплексном времени. В конечный момент времени поля действительны, что отвечает суммированию по конечным состояниям. В начальный момент на физические возбуждения полей накладываются специальные граничные условия ( $\theta$ -граничные условия) обеспечивающие проекцию на состояние с фиксированными числом частиц и энергией. Вместо граничных условий на нефизические возбуждения (имеющиеся в калибровке  $A_0 = 0$ ), накладывается условие фиксации калибровки и закон Гаусса. С помощью компьютерного кода, решающего эту граничную задачу, найдена экспонента подавления вероятностей топологических переходов при энергиях, меньших энергии сфалерона.

Однако при энергиях выше энергии сфалерона было обнаружено, что качественно меняется характер туннелирования — вместо туннелирования в соседний вакуум, система туннелирует *на сфалерон*, и распадается на элементарные возбуждения классическим образом. Метод, регуляризирующий граничную задачу и позволяющий получить решения такого вида,

был предложен в работе [61] в случае двумерной квантовой механики. В работе [62] этот метод был адаптирован к калибровочной теории поля (см. главу 2 настоящей диссертации). Полученные результаты покрывают область энергий, до  $E \simeq 2E_{\text{sph}}$ . Однако непосредственно сами результаты для квазиклассического инклюзивного сечения не позволяют получить сечения топологических переходов в двухчастичных столкновениях, так как необходимо произвести предельный переход (1). Для этого производится экстраполяция полученных данных в  $N = 0$ . Два разных метода экстраполяции дают ограничение снизу на показатель экспоненты подавления  $F_{HG}(E/E_{\text{sph}})$ , и оценку этого показателя. Сравнение результатов экстраполяции с существовавшими ранее аналитическими предсказаниями теории возмущений на фоне инстантона показывают, что вплоть до энергии сфалерона оба метода дают близкие результаты. Однако при более высоких энергиях численные результаты обнаруживают значительно более сильное подавление. Экстраполяция в область высоких энергий показывает, что по крайней мере до энергии 250 ТэВ сохраняется экспоненциальное подавление сечений.

Однако и в топологически тривиальном секторе в моделях со слабой связью при относительно невысоких энергиях существуют процессы, плохо описываемые теорией возмущений. В этом случае возможны ситуации, когда в теории появляются конкурирующие малые (или большие) параметры. Примером является процесс с большим количеством частиц  $n$  в конечном состоянии, сравнимым с обратной константой связи  $\lambda^{-1}$ .

В обычной теории возмущений даже около топологически тривиального вакуума уже наивная оценка амплитуды дает факториальную зависимость  $n!$  от количества частиц в конечном состоянии, что снимает подавление,

связанное с константой связи. На древесном уровне можно точно найти выражение для амплитуды процесса рождения одной виртуальной частицей  $n$  реальных в теории с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (2)$$

(масса положена равной единице) при специальной кинематике: все частицы обладают нулевыми пространственными импульсами [63],

$$A_{1\rightarrow n}^{\text{tree}} = n! \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (3)$$

Данный результат указывает на полную неприменимость обычной теории возмущений при  $n > \lambda^{-1}$ , поскольку входит в противоречие с унитарностью теории.

Таким образом, для вычисления данных сечений необходим некоторый непertурбативный метод. Интерес представляет режим

$$\lambda \rightarrow 0, \quad \lambda n = \text{fixed}, \quad \varepsilon = \text{fixed}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon = (E - n)/n$  — средняя кинетическая энергия конечных частиц в системе центра масс. Существующие пертурбативные вычисления [64, 65] свидетельствуют о том, что в этом режиме полное сечение имеет экспоненциальный вид,

$$\sigma_{1\rightarrow n} \sim \exp\left(\frac{1}{\lambda}F(\lambda n, \varepsilon)\right). \quad (5)$$

Это указывает на возможную применимость квазиклассического приближения. В работе [66] сформулирован метод получения экспоненты  $F(\lambda n, \varepsilon)$  во всех петлях, сводящийся к решению классической граничной задачи в комплексном времени. При малых  $\lambda n$  оказывается достаточным решить чисто евклидовы уравнения с определенными граничными условиями. В

обычной теории возмущений этот предел отвечает вкладу древесных диаграмм, что дает следующую зависимость от  $\lambda$ :

$$F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon) = \lambda n \ln \left( \frac{\lambda n}{16} \right) - \lambda n + \lambda n f(\varepsilon) . \quad (6)$$

Отметим, что в пределах своей области применимости, т. е. при  $\lambda n \ll 1$ , эта зависимость дает экспоненциальное подавление сечения, если, конечно, функция  $f(\varepsilon)$  не обращается в бесконечность. Но при росте  $\lambda n$  функция  $F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon)$  становится положительной, и подавление пропадает. Следовательно, в этом случае необходимо учитывать петлевые поправки в  $F(\lambda n, \varepsilon)$ , которые имеют порядок  $(\lambda n)^2$  и выше (см. например [67]).

В работах [66, 68], была развита квазиклассическая техника для нахождения единственной неизвестной функции  $f(\varepsilon)$  в (6). Древесное сечение в ней связывается с асимптотикой на бесконечности сингулярного решения уравнений поля в евклидовом четырехмерном пространстве. Гиперповерхность сингулярностей зависит от  $\varepsilon$  и определяется в процессе вычислений.

В диссертации сингулярное решение уравнений находится численно для некоторого подкласса поверхностей сингулярности (или, строго говоря, для асимптотик решения на бесконечности, которые определяют поверхность сингулярности). С помощью вариационной процедуры Рэлея–Ритца получено ограничение снизу на  $F_{\text{tree}}$ . Полученное ограничение совпадает с аналитическим при низких энергиях. Однако при высоких энергиях оно усиливает все существующие аналитические ограничения на функцию  $F(\varepsilon)$ . Кроме этого, подтверждены аналитические предсказания несферичности (в четырехмерном смысле) седловой поверхности сингулярностей.

Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, заключения и дополнения.

В главе 1 описывается общая формулировка квазиклассического метода нахождения инклюзивной вероятности процессов с изменением топологического числа и получены некоторые низкоэнергетические аналитические результаты. В разделе 1.1 приводится формулировка граничной задачи, и рассматриваются общие свойства вероятностей при различных значениях начальной энергии  $E$  и числа частиц  $N$ . В разделе 1.2 получено аналитическое решение данной задачи при низкой энергии и малом (но ненулевом) начальном числе частиц. Полученные результаты анализируются в разделе 1.3, в частности, проверяется гипотеза о предельном переходе (1) к двухчастичным столкновениям.

Глава 2 посвящена численному исследованию топологических переходов в калибровочной теории. В разделе 2.1 полная граничная задача редуцируется до  $O(3)$ -симметричной, что делает численное решение уравнений возможным с использованием современных вычислительных мощностей. Раздел 2.2 посвящен формулировке решеточной версии граничной задачи: уравнений поля (раздел 2.2.1) и граничных условий (разделы 2.2.2, 2.2.3). Итеративный процесс поиска решений граничной задачи описан в разделе 2.3. Решения при энергии, меньшей сфалеронной, описаны в разделе 2.4. Полученные результаты сравниваются с аналитическими низкоэнергетическими предсказаниями раздела 1.3 в разделе 2.4.1. В разделе 2.5 описывается регуляризация, требуемая для получения решений при высокой энергии (решения, которые туннелируют «на сфалерон»). Раздел 2.6 посвящен общему описанию численных результатов, и проверкам численных методов. В разделах 2.7 и 2.8 описывается экстраполяция в область нулевых  $N$ , отвечающую двухчастичным столкновениям, и получены ограничение и оценка показателя экспоненты подавления двухчастичных сечений, со-

ответственно.

В главе 3 рассматриваются процессы многочастичного рождения в теории  $\lambda\varphi^4$ . Общий формализм получения древесных сечений с помощью сингулярных решений уравнений поля приводится в разделе 3.1. В разделе 3.2 проводится разложение по сферическим модам, необходимое для численного решения задачи. Процесс численного решения описан в разделе 3.3. Полученные результаты анализируются в разделе 3.4.

В Заключении сформулированы основные полученные в диссертации результаты.

Дополнение посвящено описанию алгоритма решения дискретизованных уравнений, описанных в главе 2, приспособленного для параллельного проведения вычислений.

В основу диссертации положены работы, выполненные в 1995–2003 годах в Отделе теоретической физики ИЯИ РАН и Центре вычислительных наук Бостонского университета. Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены в 1996–2003 гг. на научных семинарах ИЯИ РАН и Бостонского университета, на XXIV Зимней школе ИТЭФ (Снегири, 1996), на 37-ой Международной школе по субъядерной физике (Эриче, Италия, 1999г.), двух Международных школах «Частицы и космология» (Приэльбрусье, 2001 г. и 2003 г.), на Международном семинаре «КВАРКИ-96» (Ярославль, 1996г.). Результаты опубликованы в работах [58, 62, 69–72]

## Глава 1

### Теория SU(2) с хиггсовским дублетом: аналитические результаты

#### 1.1 Обзор задачи туннелирования

В неабелевых калибровочных моделях имеется бесконечное число топологически различных вакуумов, нумерующихся целым топологическим числом. Процессы, изменяющие топологическое число вакуума, сопровождаются нарушением фермионных (барионного и лептонного) чисел [4], что чрезвычайно интересно и для физики частиц, и для космологии. Топологически различные вакуумы разделены потенциальным барьером, высота которого, в моделях с механизмом Хиггса, определяется энергией сфалерона. При низких энергиях переходы с нарушением топологического числа могут происходить только туннельным образом, а при достаточно высокой энергии и подходящем начальном состоянии — классическим образом.

Мы будем изучать топологические переходы на примере калибровочной теории с группой SU(2) и хиггсовским дублетом. Эта модель соответствует бозонному сектору стандартной электрослабой модели с нулевым углом смешивания  $\theta_W = 0$ . В ведущем порядке по константе связи можно пренебречь влиянием фермионов на поведение калибровочных и хиггсовских полей, см. [73]. Действие этой модели дается выражением

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha_W} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi - 1)^2 \right\}, \quad (1.1)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \quad (1.2)$$

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - iA_\mu)\Phi \quad (1.3)$$

с  $A_\mu = A_\mu^a \sigma^a / 2$  и  $\alpha_W = g^2 / 4\pi$ . Дополнительные константы в действии были исключены с помощью специального выбора системы единиц. Размерные параметры легко восстановить в окончательном результате воспользовавшись тем, что для действия (1.1) масса калибровочного бозона равна

$$M_W = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (1.4)$$

а масса хиггсовского бозона —

$$M_H = \sqrt{8\lambda} M_W .$$

В вычислениях использовалось значение константы самодействия хиггсовского поля  $\lambda = 0.125$ , что соответствует равенству масс  $M_H = M_W$ . Зависимость результатов от массы хиггсовского бозона слаба (это было проверено численно), и, следовательно, такой выбор вполне оправдан. Отметим, что часто в формулах будет опускаться общий фактор  $1/\alpha_W$ , что не вызывает неоднозначностей.

Любая вакуумная конфигурация в этой модели получается из тривиального вакуума  $A_\mu = 0$ ,  $\Phi = \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  с помощью некоторого калибровочного преобразования  $U(x)$ . Мы будем работать в калибровке  $A_0 = 0$ , в которой вакуумные конфигурации описываются не зависящей от времени калибровочной функцией  $U(x)$ , отвечающей остаточной калибровочной инвариантности. При этом поля на пространственной бесконечности не могут изменяться в течении эволюции (иначе кинетическая энергия системы

обращается в бесконечность). Поэтому необходимо рассматривать только класс функций  $U(\mathbf{x})$  с фиксированной асимптотикой на пространственной бесконечности. Часто используется соглашение  $U(\mathbf{x} \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ , при этом все вакуумные конфигурации описываются отображением пространства  $\mathbf{R}^3$  с отождествленной бесконечностью (гомотопически эквивалентного  $S^3$ ) в калибровочную группу  $SU(2) \sim S^3$ . Степень этого отображения и является топологическим числом соответствующего вакуума. Такой выбор удобен при анализе возбуждений около топологически тривиального вакуума. В других случаях могут оказаться удобны более сложные выборы поведения калибровочной функции на бесконечности, как то, например,  $U(\mathbf{x}) \rightarrow \exp\{i\sigma\mathbf{x}/|\mathbf{x}|\}$ , который отображает сферу  $S^2$  пространственных бесконечностей на экваториальную сферу  $S^2$  калибровочной группы  $SU(2)$ . Два простейших соседних калибровочных вакуума модели при таком выборе отображают пространство  $\mathbf{R}^3$  либо на верхнюю или нижнюю полусферы калибровочной группы  $SU(2)$ , соответственно. При таком выборе калибровки сфалеронная конфигурация имеет наиболее простой вид. Именно такое калибровочное соглашение будет использоваться нами везде, кроме разложения начального состояния по физическим модам.

Мы будем исследовать вероятность топологических переходов в описанной модели с помощью метода, предложенного в работах [50–53]. Основная его идея заключается в том, чтобы вместо процесса с эксклюзивным двухчастичным начальным состоянием, рассматривать процессы с изменением топологии и инклюзивным начальным состоянием с энергией  $E$  и квазиклассически большим начальным числом частиц  $N$ . Вероятность перехода  $\sigma(E, N)$  можно использовать в качестве ограничения на вероятность эксклюзивных двухчастичных процессов [53], а экспонента двухчастичной

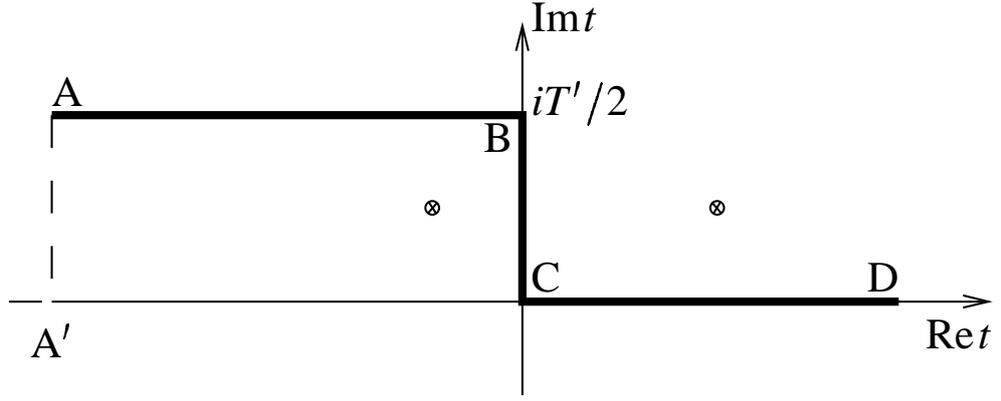


Рис. 1.1. Контур, используемый для граничной задачи.

вероятности перехода получается в пределе  $\tilde{N} \equiv \alpha_W N \rightarrow 0$ .

Инклюзивная вероятность туннелирования из состояния с фиксированной энергией  $E$  и числом частиц  $N$  вблизи некоторого вакуума в *любое* состояние вблизи соседнего вакуума определяется, как

$$\sigma(E, N) = \sum_{i, f} |\langle f | \hat{S} \hat{P}_E \hat{P}_N | i \rangle|^2, \quad (1.5)$$

где  $\hat{S}$  —  $S$ -матрица,  $\hat{P}_{E, N}$  проекторы на подпространства с определенной энергией  $E$  и определенным числом частиц  $N$ , а состояния  $|i\rangle$  и  $|f\rangle$  обозначают возбуждения над топологически различными вакуумами.

Сечение (1.5) можно записать в виде функционального интеграла, в котором квазиклассическое приближение соответствует интегрированию методом перевала [50]

$$\begin{aligned} \sigma(E, N) = & \int d\Theta dT da_{\mathbf{k}} da_{\mathbf{k}}^* db_{\mathbf{k}} db_{\mathbf{k}}^* d\varphi(x) d\varphi'(x) \\ & \exp \left\{ -iN\Theta - iET - \int d\mathbf{k} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* e^{-i\theta - i\omega_{\mathbf{k}} T} - \int d\mathbf{k} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* \right. \\ & + B_i(a_{\mathbf{k}}, \varphi_i) + B_f(b_{\mathbf{k}}^*, \varphi_f) + B_i^*(a_{-\mathbf{k}}^*, \varphi'_i) + B_f^*(b_{-\mathbf{k}}, \varphi'_f) \\ & \left. + iS(\varphi) - iS(\varphi') \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $\varphi$  — собирательное обозначение для всех физических полей в теории. Граничные члены  $B_i$  и  $B_f$  даются выражениями

$$\begin{aligned}
 B_i(a_{\mathbf{k}}, \varphi_i) &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \left[ -\omega_{\mathbf{k}} \varphi_i(\mathbf{k}) \varphi_i(-\mathbf{k}) - a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega_{\mathbf{k}} T_i} \right. \\
 &\quad \left. + 2\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} T_i} a_{\mathbf{k}} \varphi_i(\mathbf{k}) \right], \\
 B_f(b_{\mathbf{k}}^*, \varphi_f) &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \left[ -\omega_{\mathbf{k}} \varphi_f(\mathbf{k}) \varphi_f(-\mathbf{k}) - b_{\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}}^* e^{2i\omega_{\mathbf{k}} T_f} \right. \\
 &\quad \left. + 2\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} T_f} b_{\mathbf{k}}^* \varphi_f(-\mathbf{k}) \right],
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

где  $\varphi_{i,f}(\mathbf{k})$  — пространственные Фурье образы полей в начальный ( $T_i$ ) и конечный ( $T_f$ ) моменты времени. В конце вычислений подразумевается взятие предела  $T_{i,f} \rightarrow \mp\infty$ . Комплексные переменные интегрирования  $a_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}^*$  отвечают представлению когерентных состояний [74, 75], использованному для описания начального и конечного состояний; они являются классическими аналогами операторов рождения и уничтожения. Интегрирование по этим переменным обеспечивает суммирование по начальным и конечным состояниям в (1.5). Функциональные интегралы по  $\varphi(x)$  и  $\varphi'(x)$  соответствуют амплитуде перехода и комплексно сопряженной амплитуде, соответственно. Заметим, что интегрирование присходит и по граничным значениям полей  $\varphi_{i,f}$  и  $\varphi'_{i,f}$ . Интегралы по  $\mathcal{T}$  и  $\Theta$  служат для проецирования на подпространства определенного  $E$  и  $N$ .

Интеграл (1.6) можно брать в седловом приближении, так как показатель экспоненты пропорционален  $1/\alpha_W$ , который неявно присутствует в выражении (а  $N, E \sim 1/\alpha_W$ ).

Опишем седловые уравнения для интеграла (1.6). Мы получим, что эти уравнения сводятся к определенной граничной задаче для полей  $\varphi$  и  $\varphi'$ . Переменные  $a_{\mathbf{k}}$ ,  $a_{\mathbf{k}}^*$ ,  $b_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}^*$  входят в показатель экспоненты квадратичным

образом, и интеграл по ним можно взять явно:

$$\begin{aligned} \sigma(E, N) = & \int d\Theta dT d\varphi(x) d\varphi'(x) \prod_{\mathbf{k}} \delta(\varphi_{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) - \varphi'_{\mathbf{f}}(\mathbf{k})) \times \\ & \exp \left\{ -iN\Theta - iET + iS(\varphi) - iS(\varphi') \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2} \left( (1 + \gamma_{\mathbf{k}}^2) [\varphi_i(\mathbf{k})\varphi_i(-\mathbf{k}) + \varphi'_i(\mathbf{k})\varphi'_i(-\mathbf{k})] - 4\gamma_{\mathbf{k}}\varphi_i(\mathbf{k})\varphi'_i(-\mathbf{k}) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\gamma_{\mathbf{k}} = e^{i\Theta + i\omega_{\mathbf{k}}T}.$$

Важным свойством представления (1.8) является то, что в показатель экспоненты в подынтегральном выражении входят только действие и граничные члены. Таким образом дискретизация показателя экспоненты относительно проста.

Обратимся собственно к седловым уравнениям. Варьируя экспоненту по полям  $\varphi(x)$  и  $\varphi'(x)$ , находим

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \frac{\delta S}{\delta \varphi'} = 0, \quad (1.9)$$

т.е. обычные уравнения поля. Граничные условия для этих уравнений получаются при вариации по граничным значениям полей. При конечном времени  $\delta$ -функция в выражении (1.8) дает связь  $\delta\varphi_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \delta\varphi'_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  (при  $T_{\mathbf{f}} \rightarrow \infty$ ). Так как  $\delta S / \delta \varphi(T_{\mathbf{f}}, \mathbf{x}) = \dot{\varphi}(T_{\mathbf{f}}, \mathbf{x})$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(T_{\mathbf{f}}, \mathbf{x}) &= \dot{\varphi}'(T_{\mathbf{f}}, \mathbf{x}), \\ \varphi(T_{\mathbf{f}}, \mathbf{x}) &= \varphi'(T_{\mathbf{f}}, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Таким образом, в конечной асимптотической области седловые значения полей  $\varphi$  и  $\varphi'$  совпадают.

Вариация по начальным значениям  $\varphi_i$  и  $\varphi'_i$  приводит к уравнениям, которые можно записать в следующем виде,

$$\begin{aligned} i\dot{\varphi}_i(\mathbf{k}) + \omega_{\mathbf{k}}\varphi_i(\mathbf{k}) &= \gamma_{\mathbf{k}} (i\dot{\varphi}'_i(\mathbf{k}) + \omega_{\mathbf{k}}\varphi'_i(\mathbf{k})) , \\ -i\dot{\varphi}_i(\mathbf{k}) + \omega_{\mathbf{k}}\varphi_i(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\gamma_{\mathbf{k}}} (-i\dot{\varphi}'_i(\mathbf{k}) + \omega_{\mathbf{k}}\varphi'_i(\mathbf{k})) . \end{aligned}$$

Эти уравнения упрощаются при записи с помощью частотных компонент поля. В начальной асимптотической области ( $t \rightarrow -\infty$ ), где  $\varphi$  и  $\varphi'$  удовлетворяют свободным уравнениям поля, можно записать

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \{ \dot{f}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}x} + g_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}x} \}, \\ \varphi'(x) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \{ \dot{f}'_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}x} + g_{\mathbf{k}}'^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}x} \}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Тогда граничные условия на части A контура принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{f}_{\mathbf{k}} &= \gamma_{\mathbf{k}} \dot{f}'_{\mathbf{k}} , \\ g_{\mathbf{k}}^* &= \frac{1}{\gamma_{\mathbf{k}}} g_{\mathbf{k}}'^* , \end{aligned} \quad (1.12)$$

Наконец, два последних седловых уравнения отвечают вариации экспоненты в (1.8) по отношению к  $\Theta$  и  $\mathcal{T}$ . Эти уравнения определяют седловые значения  $\Theta$  и  $\mathcal{T}$  в зависимости от  $E$  и  $N$ . В терминах частотных компонент  $\dot{f}_{\mathbf{k}}$  и  $g_{\mathbf{k}}$  они имеют вид (при условии выполнения граничных условий (1.12))

$$E = 2 \operatorname{Re} \frac{\partial \mathcal{S}_{\text{ABCD}}}{\partial \mathcal{T}} = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \dot{f}_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*, \quad (1.13)$$

$$N = 2 \operatorname{Re} \frac{\partial \mathcal{S}_{\text{ABCD}}}{\partial \Theta} = \int d\mathbf{k} \dot{f}_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*. \quad (1.14)$$

В этих уравнениях легко узнать выражения для энергии и числа частиц для свободного классического поля, где  $n_{\mathbf{k}} \equiv \dot{f}_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*$  является числом заполнения для моды с пространственным импульсом  $\mathbf{k}$ .

Поле  $\varphi'(x)$  в описанной граничной задаче появилось из выражения для комплексно сопряженной амплитуды. Это позволяет предположить, что седловое значение для него является комплексным сопряжением седлового значения  $\varphi(x)$ . Действительно, подстановка

$$[\varphi(t, \mathbf{x})]^* = \varphi'(t, \mathbf{x})$$

совместима с граничной задачей (1.9)–(1.14). В этом случае седловые значения  $\mathcal{T}$  и  $\Theta$  чисто мнимые

$$\mathcal{T} = iT, \quad \Theta = i\theta,$$

при условии действительности начальной энергии и числа частиц. При этом граничные условия (1.10) обеспечивают асимптотическую действительность поля  $\varphi$  на части D контура

$$\text{Im } \dot{\varphi}(T_f, \mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad \text{Im } \varphi(T_f, \mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{для } T_f \rightarrow +\infty,$$

в то время, как уравнение (1.12) связывает положительно и отрицательно частотные компоненты поля  $\varphi$  в начальной асимптотической области

$$\dot{f}_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}},$$

со следующим определением

$$\gamma_{\mathbf{k}} = e^{-\theta - \omega_{\mathbf{k}} T}, \quad (1.15)$$

До этого момента, начальное время  $T_i$  считалось действительным. Удобнее, однако, переформулировать граничную задачу непосредственно в терминах полей на контуре ABCD. При этом начальное время приобретает мнимую составляющую  $\text{Im } T_i = T'/2$  (см. рис. 1.1). В начальной асимптотической

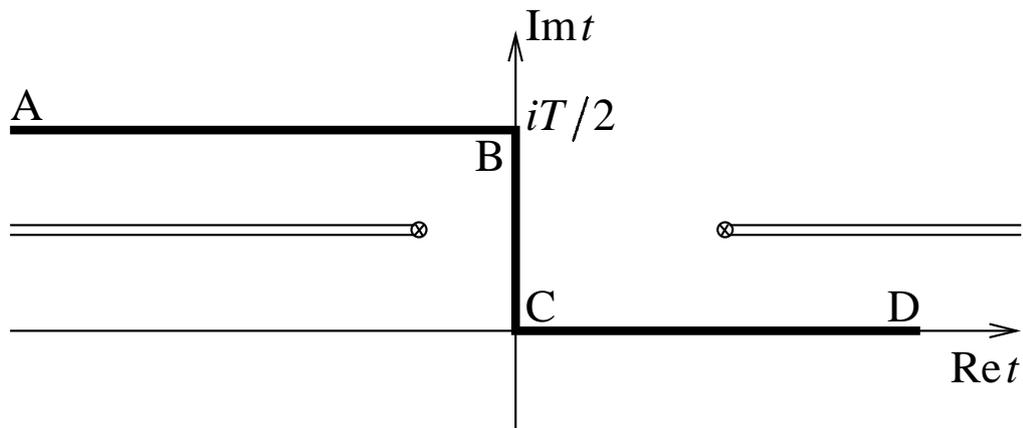


Рис. 1.2. Контур в комплексном времени, используемый для формулировки граничной задачи (1.20). Перечеркнутые кружки обозначают сингулярности поля. В случае, когда поле сферически симметрично в пространстве, то наиболее близкие к мнимой оси времени сингулярности имеют  $r = 0$ , а для других  $r$  сингулярности находятся при больших  $|\text{Re } t|$ .

области легко совершить аналитическое продолжение в комплексное время явным образом с помощью уравнений (1.11). В уравнениях (1.12)–(1.14) это продолжение приводит к замене  $\gamma_{\mathbf{k}}$  на

$$\gamma_{\mathbf{k}} = e^{-\theta - \omega_{\mathbf{k}}(T - T')} . \quad (1.16)$$

Наиболее простые граничные условия получаются в случае равенства высоты контура в мнимом времени  $T'$  и параметра  $T$  — тогда  $\gamma$  не зависит от  $\mathbf{k}$

$$\gamma = e^{-\theta} .$$

В большинстве случаев именно таким вариантом граничной задачи мы и будем пользоваться.

Окончательно, получается следующий метод вычисления экспоненты

инклюзивной вероятности топологических переходов

$$\sigma(E, N) \sim \exp \left\{ -\frac{4\pi}{\alpha_W} F(\tilde{E}, \tilde{N}) \right\} \quad (1.17)$$

$$\frac{4\pi}{\alpha_W} F(\tilde{E}, \tilde{N}) = 2 \operatorname{Im} S_{ABCD}(\varphi) - N\theta - ET - \operatorname{Re} \mathcal{B}_i .$$

Здесь  $S_{ABCD}(\varphi)$  — действие на контуре ABCD, параметры  $T$  и  $\theta$  являются Лежандрово сопряженными к  $E$  и  $N$ ; параметр  $T$  совпадает с высотой контура в мнимом времени, рис. 1.2. Обычно мы будем опускать тильду над перемасштабированными величинами, а также общий фактор  $1/\alpha_W$ , восстанавливая его только в окончательном результате. Граничный член, роль которого сводится к компенсации зависимости мнимой части действия от начального времени, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i = & -\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \operatorname{Re} \varphi(\mathbf{k}, T_i) \operatorname{Re} \varphi(-\mathbf{k}, T_i) \\ & + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \operatorname{Im} \varphi(\mathbf{k}, T_i) \operatorname{Im} \varphi(-\mathbf{k}, T_i) \end{aligned} \quad (1.18)$$

и записывается через фурье компоненты поля на участке A контура:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) \Big|_{t \rightarrow -\infty + iT/2} &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \varphi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left( \hat{f}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-iT/2)+i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \hat{g}_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-iT/2)-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right) . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Само поле  $\varphi$  должно удовлетворять классическим уравнениям движения

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0 . \quad (1.20a)$$

В начальный момент времени частотные компоненты должны удовлетворять следующему граничному условию (« $\theta$  граничное условие»)

$$\hat{f}_{\mathbf{k}} = e^{-\theta} \hat{g}_{\mathbf{k}} . \quad (1.20b)$$

Для ненулевого  $\theta$  это уравнение подразумевает, что поле продолжено в комплексное пространство. Если поле само по себе комплексное, как, например,  $\Phi$  в модели (1.1), в комплексное пространство независимо продолжаются его действительная и мнимая части.

На конечном участке контура (CD), поля удовлетворяют условию действительности

$$\text{Im } \dot{\varphi}(\mathbf{x}, T_f \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad \text{Im } \varphi(\mathbf{x}, T_f \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (1.20c)$$

(для комплексных полей, таких как  $\Phi$  в (1.1), это означает действительность  $(\Phi + \Phi^\dagger)/2$  и  $(\Phi - \Phi^\dagger)/2i$ ).

Уравнения (1.20a)–(1.20c) определяют граничную задачу для нахождения вероятности топологических переходов.

Осталось рассмотреть уравнения, получающиеся при варьировании по вспомогательным параметрам  $T$  и  $\theta$ :

$$E = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^* \quad (1.21)$$

$$N = \int d\mathbf{k} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^* . \quad (1.22)$$

Они косвенно определяют значения  $T$  и  $\theta$  для данных энергии и числа частиц. С другой стороны, можно фиксировать  $T$  и  $\theta$ , решить граничную задачу (1.20), и затем найти соответствующие значения  $E$  и  $N$  с помощью уравнений (1.21) и (1.22). Это особенно удобно для численных расчетов.

Решение граничной задачи (1.20) выглядит следующим образом. На участке CD контура, решение асимптотически действительно, оно описывает эволюцию системы после туннелирования. С другой стороны, из-за граничного условия (1.20b) поля в начальной асимптотической области существенно комплексны, если  $\theta \neq 0$ . Таким образом, начальное состояние,

максимизирующее вероятность (1.6), не описывается действительным классическим полем, т.е. эта стадия эволюции существенно квантовая даже при квазиклассически большом  $N \sim 1/\alpha_W$ .

Обсудим некоторые тонкости описанной граничной задачи. Во первых, условие асимптотической действительности (1.20с) не всегда совпадает с условием действительности при конечном времени. В случае, когда на части CD контура решение стремится к вакуумной конфигурации, то асимптотическое условие (1.20с) обеспечивает действительность решения при любом *конечном* положительном времени. Действительно, в этом случае при достаточно больших временах система находится в линейном режиме, т.е. решение для каждой частотной составляющей имеет вид  $A_n \cos(\omega_n t)$  с постоянной амплитудой  $A_n$ . При этом условие (1.20с) означает, что все амплитуды  $A_n$  действительны. Из уравнений движения следует, что решение должно быть действительным и на всем участке CD контура. Такая ситуация отвечает обычному туннелированию в соседний вакуум. Однако, если решение на конечном участке эволюции остается в области взаимодействия, т.е. около от сфалерона, ситуация полностью меняется. Так как одно из возмущений около сфалерона нестабильное, то существуют решения, которые приближаются к сфалерону *экспоненциально* по комплексифицированному нестабильному направлению, т.е. для отрицательной моды решение имеет вид  $Ve^{-\omega t}$  с комплексной амплитудой  $V$ . При этом решение комплексно в любой конечный момент времени, но стремится к действительному при  $t \rightarrow +\infty$ . Такие решения отвечают туннелированию на сфалерон. После туннелирования система скатывается в требуемый вакуум классическим образом (вероятность того, что этот вакуум правильный, порядка единицы, что не влияет на показатель экспоненты  $F$ ). В разделе

ле 2.5 мы убедимся, что при больших энергиях,  $E \gtrsim E_{\text{sph}}$ , такая ситуация действительно имеет место.

Во вторых, граничные условия (1.12) на начальном участке контура (наложенные на действительной оси времени) означают, что  $\varphi$  и  $\varphi' = \varphi^*$  не совпадают при больших отрицательных временах, в то время, как при больших положительных временах они совпадают из-за условия (1.10). Для решений, заканчивающихся вблизи вакуума (и, соответственно, действительных при любом конечном времени  $t > 0$ ), это означает, что должна существовать точка ветвления в комплексной плоскости времени: контур на рис. 1.2 обходит вокруг нее и не может быть непрерывно продеформирован к действительной оси времени. Однако, этот аргумент *не действует* для решений, которые заканчиваются вблизи сфалерона при  $t \rightarrow +\infty$ . В этом случае точка ветвления между частью АВ контура и действительной осью времени может отсутствовать. Это действительно так при достаточно высоких энергиях (см. [61]).

Решения описанной граничной задачи можно найти численно для разных значений  $E$  и  $N$ . Плоскость  $E - N$  делится на несколько различных областей (см. рис. 1.3). Энергии  $E < N \cdot \min(M_W, M_H)$  тривиально запрещены кинематически. Для относительно низких энергий (область А), переход между различными топологическими секторами возможен только туннельным образом. При энергии сфалерона,  $E_{\text{sph}}$ , ситуация меняется. Сфалерон с добавкой небольшого возмущения вдоль нестабильного направления является решением, которое находится в разных топологических секторах при отрицательных и при положительных временах. Так как отрицательная мода у сфалерона по определению единственна, то существует ровно одно решение такого типа, и, следовательно, такое решение име-

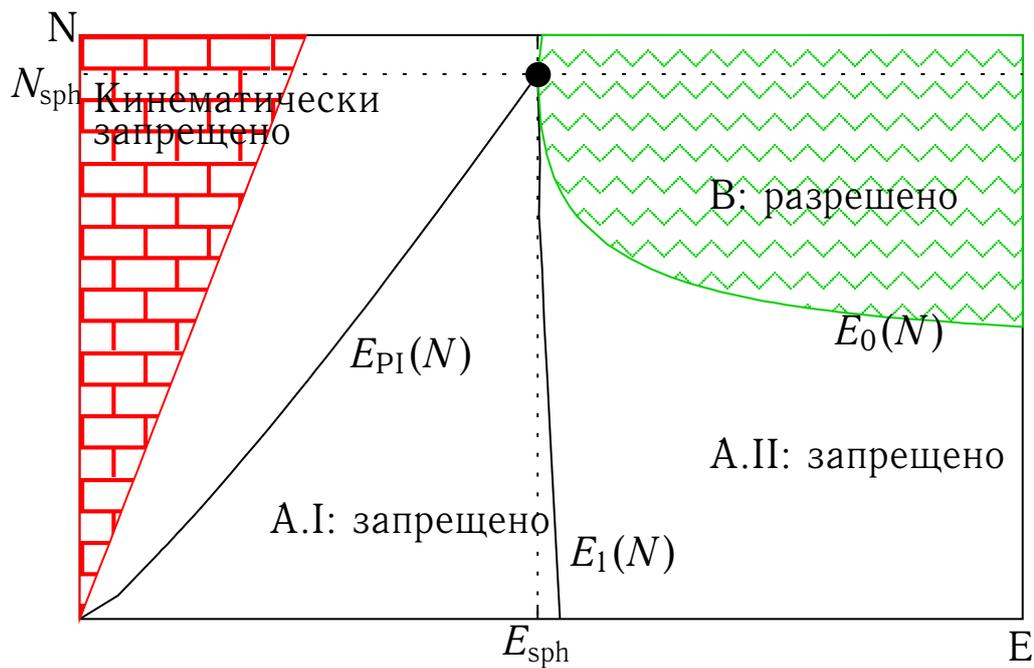


Рис. 1.3. Области в плоскости  $E-N$ .

ет определенное число частиц в начальном состоянии  $N_{\text{sph}}$ . При бóльших энергиях можно добавлять также возмущения положительных мод вокруг сфалерона и получать решения с различными числами частиц в начальном состоянии, в особенности, с меньшими. Такие решения находятся в области классически разрешенных переходов (область В на рис. 1.3), где процессы с изменением топологического числа не подавлены. На границе между областями А и В находятся решения, которые бесконечно долго находятся около сфалерона (заметим, что так как связанных состояний на фоне поля сфалерона нет [76], любые положительные возмущения над сфалероном улетают за конечное время, то есть решение действительно обязательно сходится к сфалерону).

В классически запрещенной области А есть специальное семейство решений, соответствующих  $\theta = 0$ . Они отмечены на рис. 1.3 линией  $E_{\text{PI}}(N)$ . Для них граничное условие (1.20b) сводится к условию действительно-

сти при  $\text{Im } t = T/2$ . Решение получившейся граничной задачи называется «периодическим инстантоном», введенном в работе [77]. Периодический инстантон — это действительное периодическое решение Евклидовых уравнений поля с периодом  $T$ , имеющее точки остановки при  $t = 0$  и  $t = iT/2 \pmod{T}$ . Аналитическое продолжение периодического инстантона в минковском направлении из точек остановки дает решение, действительное на линиях  $\text{Im } t = 0$  и  $\text{Im } t = T/2$ , и, соответственно, удовлетворяющее граничной задаче (1.20) с  $\theta = 0$ . Как и любое другое решение, линеаризующееся при больших отрицательных временах на участке  $A$  контура рис. 1.2, периодический инстантон характеризуется определенным числом частиц в начальном состоянии (1.22). Для данной энергии  $E$ , меньшей сфалеронной, это число таково, что показатель экспоненты подавления  $F(E, N)$  принимает наименьшее значение, т.е. переходы происходят с максимальной скоростью.

Классически запрещенная область  $A$  разделяется на две подобласти. Для низких энергий (область  $A.I$ ) система находится около вакуума на конечной стадии эволюции, и, следовательно, граничное условие (1.20с) приводит к точной действительности полей на всем участке  $CD$  контура. При энергиях, превышающих энергию сфалерона (или, точнее, выше некоторой энергии  $E_1(N)$ ), система заканчивает эволюцию вблизи сфалерона (с разлетающимися волновыми возбуждениями на фоне сфалерона, уносящими излишек энергии). При этом уравнений (1.20с) выполняется только асимптотически. Таким образом, система туннелирует «на верхушку» барьера, создавая классически нестабильную сфалеронную конфигурацию, которая затем распадается с вероятностью порядка единицы в любой из соседних вакуумов. Такая ситуация реализуется в области  $A.II$ . Такое качественно

новое поведение туннелирования при высоких энергиях связано с появлением в бифуркации в решениях, и не наблюдается в теории возмущений в любом порядке. Однако, непertурбативные методы, позволяют наблюдать этот эффект. Интересно отметить, что частично сходный результат был получен в работе [78] для распада ложного вакуума с помощью другого квазиклассического подхода.

## 1.2 $\theta$ -инстантоны при низких энергиях

В работе [52] было показано, что при низких энергиях можно приблизить решение граничной задачи (1.20) (« $\theta$ -инстантон») цепочкой инстантонов и антиинстантонов, соответственным образом модифицированных и помещенных в определенных местах на евклидовой оси времени. Хотя это приближение оправдано только при  $E \ll E_{\text{sph}}$ , приближенное решение такого вида дает общее представление о форме  $\theta$ -инстантонов во всей области  $E < E_{\text{sph}}$ . Инстантонные и антиинстантонные решения в сингулярной калибровке имеют вид [10, 79]:

$$A_{\mu}^{a(I)} = \frac{2\rho^2}{g} \frac{\bar{\eta}_{\mu\nu}^a x_{\nu}}{x^2(x^2 + \rho^2)},$$

$$A_{\mu}^{a(A)} = \frac{2\rho^2}{g} \frac{\eta_{\mu\nu}^a x_{\nu}}{x^2(x^2 + \rho^2)},$$

где  $x^0 \equiv \tau = it$  — евклидово время. Мы сконструируем  $\theta$ -инстантонное решение, поместив инстантоны и антиинстантоны вдоль евклидовой оси времени, как показано на рис. 1.4а, и домножив их на факторы  $e^{-\theta|n|}$ :

$$A_{\mu}^{a(\theta)}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\theta|n|} \left[ A_{\mu}^{a(I)}(\mathbf{x}, \tau + T_1 + nT) + A_{\mu}^{a(A)}(\mathbf{x}, \tau - T_1 + nT) \right]. \quad (1.23)$$

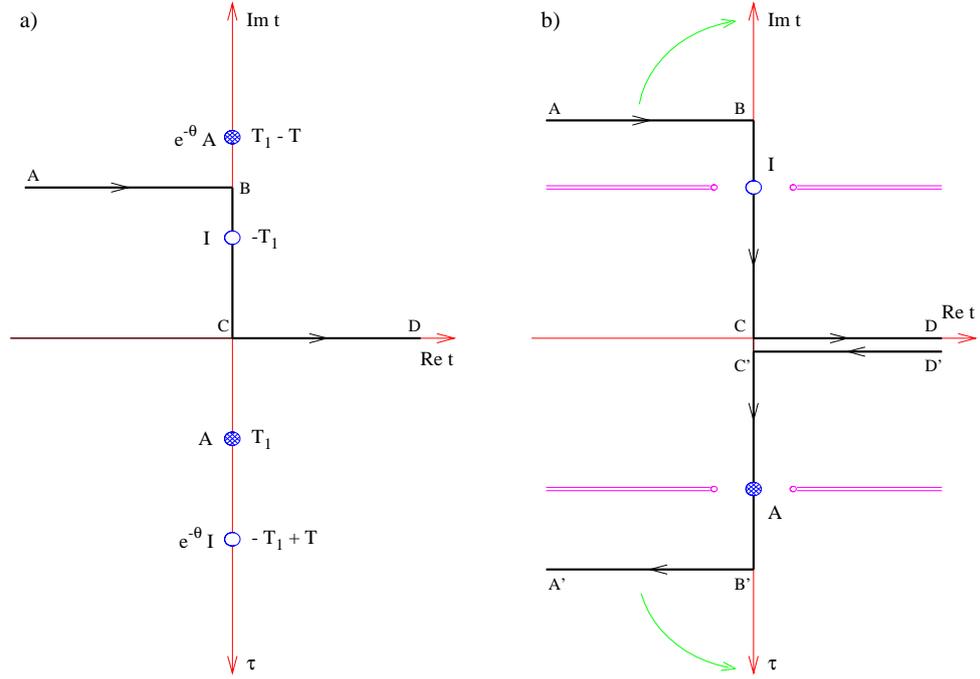


Рис. 1.4. а)  $\theta$ -инстантон при низкой энергии, б) инстантон-антиинстантонная пара.

Таким образом инстантоны (подавленные факторами  $e^{-\theta|n|}$ ) находятся в точках  $\text{Im } t = -\tau = T_1 + nT$ , а антиинстантоны — в точках  $\text{Im } t = -\tau = -T_1 + nT$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В дальнейшем мы убедимся, что размер инстантона мал по сравнению с расстоянием между инстантонами,  $\rho \ll T$ ,  $\rho \ll T_1$ , и  $T, T_1 \ll 1/(gv)$ . Это оправдывает приближение решения суммой полей инстантонов и антиинстантонов.

Покажем, что решение (1.23) удовлетворяет уравнениям поля (1.20а) на контуре ABCD и граничным условиям (1.20b) и (1.20с) в асимптотических областях A и D, соответственно. Для этого удобно произвести фурье-преобразование инстантонного поля,

$$A_{\mu}^{a(I)}(\mathbf{k}, \tau) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} A_{\mu}^{a(I)}(\mathbf{x}, \tau),$$

где

$$A_0^{a(I)}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{2i\rho^2}{g} \frac{\partial}{\partial k_a} \Phi(k, \tau), \quad (1.24a)$$

$$A_i^{a(I)}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{2\rho^2}{g} \left( \delta_{ia}\tau + i\epsilon_{ija} \frac{\partial}{\partial k_j} \right) \Phi(k, \tau), \quad (1.24b)$$

а  $k = |\mathbf{k}|$  и

$$\Phi(\mathbf{k}, \tau) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4|\tau|} e^{-k|\tau|} + O(\rho^2/\tau^3). \quad (1.24c)$$

Вдоль контура ABCD рисунка 1.2 приближенное решение (1.23) имеет вид суперпозиции «главного инстантона», находящегося в точке  $\text{Im } t = -\tau = T_1$ , с малыми вкладами от линеаризовавшихся асимптотик остальных инстантонов и антиинстантонов. Так как вне центрального кора инстантона поля, составляющие инстантон, имеют малый импульс,  $k \lesssim 1/T$  (см. (1.24c)), то их взаимодействие с кором другого инстантона подавлено степенями  $\rho^2/T^2$ . Следовательно, с точностью до поправок порядка  $O(\rho^2/T^2)$ , линейная комбинация (1.23) удовлетворяет уравнениям поля (1.20a).

В асимптотических областях A и D возможно просуммировать вклады от всех инстантонов и антиинстантонов. После перехода в калибровку  $A_0^a = 0$ , получаем

$$A_i^{a(\theta)}(\mathbf{k}, t) \Big|_A = \frac{\rho^2 \sqrt{2\pi}}{g[1 - e^{-kT-\theta}]} [e^{ikt} + e^{-ikt-kT-\theta}] \times \left\{ \text{sh}(kT_1) \left( \delta_{ia} - \frac{k_i k_a}{k^2} \right) + i\epsilon_{ija} \frac{k_j}{k} \text{ch}(kT_1) \right\}, \quad (1.25a)$$

$$A_i^{a(\theta)}(\mathbf{k}, t) \Big|_D = -\frac{\rho^2 \sqrt{2\pi} \cos(kt)}{g[1 - e^{-kT-\theta}]} \times \left\{ \left( \delta_{ia} - \frac{k_i k_a}{k^2} \right) [e^{-kT_1} - e^{kT_1-kT-\theta}] - i\epsilon_{ija} \frac{k_j}{k} [e^{-kT_1} + e^{kT_1-kT-\theta}] \right\}. \quad (1.25b)$$

Отсюда можно заключить, что граничные условия (1.20b) и (1.20c) действительно выполняются, и описанная конфигурация дает решение граничной задачи (1.20). Для этого требуется произвести сшивку асимптотики (1.25), с асимптотически свободным массивным решением на бесконечном времени [79]. Сшивка производится в области  $\rho \ll t \ll 1/M_W$ , где с хорошей точностью можно использовать как асимптотику решения нелинейных уравнений калибровочного поля в безмассовом случае (1.25), так и решение свободных уравнений в массивном случае, т.е. с  $k = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m_W^2}$ . Разлагая в этой области решение свободных уравнений по  $m_W$  и сравнивая с (1.25), получают выражения для частотных компонент  $f_k$  и  $g_k$ .

### 1.3 Вероятность процессов инстантонного типа при низких энергиях

Перед тем, как вычислять экспоненту подавления (1.17) на приближенном решении (1.23), полезно рассмотреть вклад от первой инстантон-антиинстантонной пары в мнимую часть действия на контуре ABCD (см. рис. 1.4b). Так как на этом контуре антиинстантон является комплексным сопряжением инстантона,  $A^{(A)}(\mathbf{x}, t) = [A^{(I)}(\mathbf{x}, t)]^*$ , то инстантон-антиинстантонная конфигурация  $C$ -симметрична, и

$$2 \operatorname{Im} S_{\text{ABCD}}^{(IA)} = S_{\text{ABCD}}^{(IA)} - (S_{\text{ABCD}}^{(IA)})^* = S_{\text{ABCD}}^{(IA)} + S_{\text{D'C'B'A'}}^{(IA)} = S_E^{(IA)}, \quad (1.26)$$

где  $S_E^{(IA)}$  обозначает Евклидово действие инстантон-антиинстантонной пары. Отметим, что сингулярности поля (анти)инстантона, отмеченные на рис. 1.4b пунктирными линиями, не позволяют сдвинуть контур ABCD в любую из областей  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , в которых поле (анти)инстантона обращается в ноль. Величина  $S_E^{(IA)}$  естественным образом представляется в виде суммы

вкладов инстантона и антиинстантона,

$$S^{(I)} = S^{(A)} = \frac{8\pi^2}{g^2} + 2\pi^2\rho^2, \quad (1.27)$$

(второй член является вкладом кинетического члена хиггсовского поля, а вклад его потенциального члена пренебрежимо мал) и действия взаимодействия инстантона и антиинстантона, вычисленного в работах [80–82],

$$S_{\text{int}}^{(IA)} = -\frac{96\pi^2\rho^4}{g^2l^4}. \quad (1.28)$$

Здесь  $l = 2T_1$  — расстояние между инстантоном и антиинстантоном, а поправки, содержащие степени  $\rho^2/l^2$  в (1.27) и (1.28) опущены.

Окончательно, объединив формулы (1.27) и (1.28), получаем

$$2 \operatorname{Im} S_{\text{ABCD}}^{(IA)} = \frac{16\pi^2}{g^2} + 4\pi^2\rho^2 - \frac{96\pi^2\rho^4}{l^4} + O(\rho^6/l^6). \quad (1.29)$$

Действие  $\theta$ -инстантона состоит из суммы «главного» инстантонного действия (1.27) и членов взаимодействия, которые, с точностью до поправок порядка  $O(\rho^6/T^6)$ , квадратичны по (анти)инстантонным полям. Инстантон-инстантонное взаимодействие имеет порядок  $O(\rho^6/l^6)$  (см. [80–82]) и, таким образом, не дает вклада в действие в пределах нашей точности. Следовательно, действие взаимодействия в  $\theta$ -инстантоне состоит из суммы взаимодействий различных инстантон–антиинстантонных пар. Очевидно, что если инстантон и антиинстантон оба находятся с одной стороны (сверху или снизу) от главного инстантона, то контур ABCD может быть сдвинут в область  $\tau \rightarrow \pm\infty$  без пересечения сингулярностей, и, следовательно, вклад в действие от такой пары равен нулю. Описанный ранее аргумент с  $S$ -сопряжением показывает, что даже если инстантон и антиинстантон находятся по разные стороны от главного инстантона, то их вклад в действие

все равно равен нулю. Таким образом, ненулевой вклад дает только взаимодействие главного инстантона с различными антиинстантонами. Такие вклады уже были вычислены выше. Суммируя вклады, получаем

$$S_{\text{int}}^{(\theta)} = -\frac{96\pi^2\rho^4}{g^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\theta|n|}}{(2T_1 + nT)^4} = -\frac{16\pi^2\rho^4}{g^2} \int_0^{\infty} \frac{dk k^3}{1 - e^{-kT-\theta}} [e^{-2kT_1} + e^{2kT_1-kT-\theta}] , \quad (1.30)$$

где в последнем равенстве было использовано интегральное представление для суммы. Наконец, выражение (1.17) дает ответ для показателя экспоненты подавления,

$$\frac{4\pi}{\alpha_W} F = -ET - N\theta + \frac{4\pi}{\alpha_W} + 2\pi^2 v^2 \rho^2 - \frac{4\pi\rho^4}{\alpha_W} \int_0^{\infty} \frac{dk k^3}{1 - e^{-kT-\theta}} [e^{-2kT_1} + e^{2kT_1-kT-\theta}] . \quad (1.31)$$

Решение (1.23), кроме лагранжевых множителей  $T$  и  $\theta$ , которые определяются уравнениями (1.13) и (1.14), содержит еще два свободных параметра: размер инстантона  $\rho$  и позицию «главного» инстантона  $T_1$ . Эти параметры должны выбираться так, чтобы обеспечивать экстремальность показателя экспоненты подавления  $F$ . Экстремизация (1.31) по отношению к  $T_1$  определяет отношение  $t_1 \equiv T_1/T$  как функцию  $\theta$ . Это отношение удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{\infty} \frac{dq q^4}{1 - e^{-q-\theta}} [e^{2qt_1-q-\theta} - e^{-2qt_1}] = 0 . \quad (1.32)$$

При  $\theta = 0$  (случай периодического инстантона), получается  $t_1 = 1/4$ , т.е. антиинстантоны находятся точно посередине между инстантонами. В предельном случае  $\theta \rightarrow +\infty$  (это соответствует пределу  $N \rightarrow 0$ ),  $t_1$  обращается

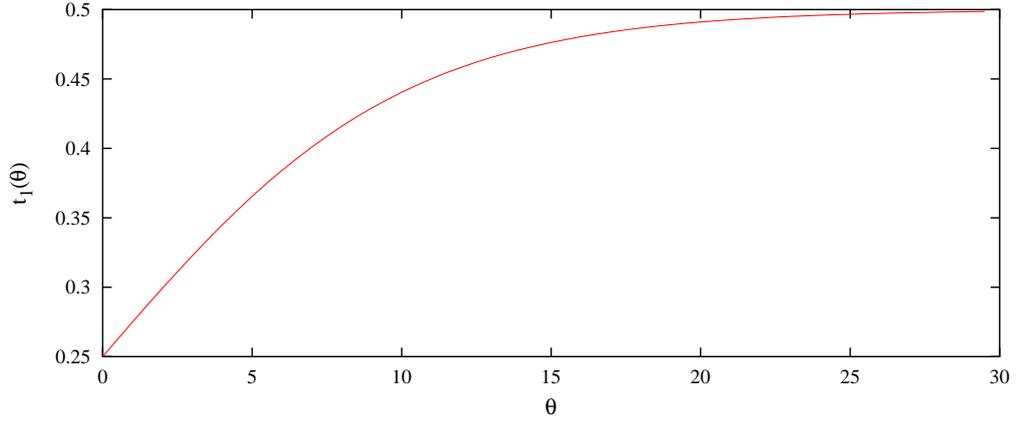


Рис. 1.5. Отношение  $t_1 = T_1/T$  как функция  $\theta$ .

в  $1/2$ ,  $t_1 \rightarrow 1/2$ , и инстантоны приближаются к соседним антиинстантонам. При изменении  $\theta$  от  $0$  до  $+\infty$ ,  $t_1$  гладко интерполирует между своими крайними значениями, см. рис. 1.5.

Удобно выразить седловые значения параметров  $\rho$ ,  $T$  и  $\theta$  через два интеграла:

$$I_E(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq q^4}{(1 - e^{-q-\theta})^2} e^{-q-\theta} \text{ch}[2qt_1(\theta)] , \quad (1.33a)$$

$$I_N(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq q^3}{(1 - e^{-q-\theta})^2} e^{-q-\theta} \text{ch}[2qt_1(\theta)] . \quad (1.33b)$$

Экстремизация выражения (1.31) по  $\rho$  дает

$$\rho^2 = \frac{2g^2 T^4}{16I_E(\theta)} , \quad (1.34)$$

а из уравнений (1.13) и (1.14) следует, что

$$T = \left[ \frac{EI_E(\theta)}{\pi^2 g^2} \right]^{1/3} , \quad (1.35)$$

$$\frac{N}{E^{4/3}} = I_N(\theta) \left[ \frac{1}{\pi g I_E(\theta)} \right]^{2/3} . \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) явно определяет  $\theta$  в виде функции от  $N/E^{4/3}$ . В терминах интегралов  $I_E(\theta)$  и  $I_N(\theta)$ , показатель экспоненты подавления принимает вид

$$\frac{4\pi}{\alpha_W} F(\theta, E) = \frac{4\pi}{\alpha_W} - \left[ \frac{E^4}{16\pi^2 g^2 v^4} \right]^{1/3} \left( 3I_E(\theta)^{1/3} + 4\theta \frac{I_N(\theta)}{I_E(\theta)^{2/3}} \right) + O(\rho^6/g^2 T^6). \quad (1.37)$$

(i) Отметим, что поправки к экспоненте подавления, найденные в приближении цепочкой инстантонов, имеют порядок  $O(\rho^6/T^6)$ , где

$$\frac{\rho^6}{T^6} = \frac{E^2 g^2}{512\pi^4 I_E(\theta)}. \quad (1.38)$$

Так как функция  $I_E(\theta)$  ограничена, то  $(\rho/T)^6 \sim O(E^2 g^2)$ . Следовательно, использованное приближение действительно справедливо при  $E^2 \ll 1/g^2$ . Отметим также, что поправки, связанные с полем Хиггса, тоже имеют порядок  $(\rho/T)^6$ .

(ii) Хотя уравнение (1.36) невозможно решить аналитически для всех  $\theta \in [0; +\infty)$ , можно проанализировать асимптотику больших  $\theta$  (или, что то же самое, малых  $N$ ). При этом получается, что при малых  $N$ ,

$$\frac{4\pi}{\alpha_W} F = \frac{4\pi}{\alpha_W} - f \left\{ 3 - 5x \log x + 5x + \frac{5}{3}x^2 - \frac{35}{27}x^3 + O(x^4) \right\}, \quad (1.39)$$

где

$$f \equiv \left[ \frac{3E^4}{16\pi^2 g^2} \right]^{1/3}, \quad (1.40)$$

и

$$x \equiv N/f. \quad (1.41)$$

Заметим, что хотя предел  $N \rightarrow 0$  сингулярен, член  $N \log N$  не зависит от энергии (по крайней мере, в первом порядке теории возмущения). Следовательно, «период»  $T(E, N)$  является регулярной функцией при  $N = 0$ :

$$T = \frac{4f}{E} \left\{ 1 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}x^2 + \frac{70}{81}x^3 + O(x^4) \right\}. \quad (1.42)$$

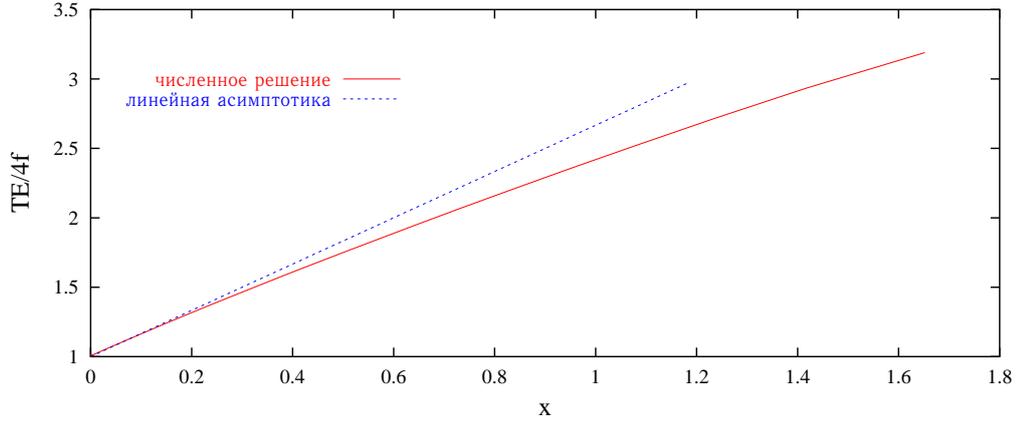


Рис. 1.6. Перемасштабированный период  $T$ , как функция  $x$ , и его линейная асимптотика при малых  $x$ .

Это оправдывает полиномальную экстраполяцию  $T$  в область малых  $N$ , которая будет использована в разделе 2.8 для получения оценки показателя подавления. Перемасштабированный период  $T$ , как функция  $x = N/f$  при фиксированной энергии, и его линейная асимптотика в пределе малых  $N$  изображены на рис. 1.6.

(iii) В предельных случаях  $N = 0$  (двухчастичные столкновения) и  $\theta = 0$  (периодический инстантон) ведущие члены порядка  $(g^2 E)^{4/3}$  в показателе экспоненты подавления были найдены в работах [36] и [77], соответственно. Из уравнений (1.37), (1.39) получаем

$$\frac{4\pi}{\alpha_W} F \Big|_{\theta=0} = \frac{16\pi^2}{g^2} - \frac{3}{2} \left[ \frac{\pi^2 E^4}{4g^2} \right]^{1/3} + O(E^2/v^2),$$

$$\frac{4\pi}{\alpha_W} F \Big|_{N=0} = \frac{16\pi^2}{g^2} - 3 \left[ \frac{3E^4}{32\pi^2 g^2} \right]^{1/3} + O(E^2/v^2).$$

Это совпадает с результатами [36, 77]. Сравнение с результатом для  $N = 0$  подтверждает правильность предположения (1) о восстановлении показателя экспоненты подавления для двухчастичных начальных состояний с помощью предельного перехода  $N \rightarrow 0$ .

## Глава 2

### SU(2) теория: численные результаты

#### 2.1 Сведение к сферически симметричной задаче

Мы ограничим наше рассмотрение только сферически симметричными конфигурациями SU(2) модели [83]. Строго говоря, получаемые при этом результаты соответствуют s-волновому рассеянию. Существуют аргументы, основывающиеся на пространственной симметрии  $2 \rightarrow 2$  рассеяния вперед и некоторых динамических соображениях, что основной вклад дают именно O(3)-симметричные решения [84]. С другой стороны, ограничение сферически симметричными конфигурациями делает задачу доступной для численного анализа на современных компьютерах.

В сферически симметричной подстановке исходные поля записываются через шесть действительных полей  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  и  $\nu$ , зависящих от двух координат  $r$  и  $t$ , следующим образом

$$\begin{aligned}
 A_0(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} a_0(r, t) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\
 A_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \left[ a_1(r, t) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} n_i + \frac{\alpha(r, t)}{r} (\sigma_i - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} n_i) + \frac{1 + \beta(r, t)}{r} \epsilon_{ijk} n_j \sigma_k \right] \quad (2.1) \\
 \Phi(\mathbf{x}, t) &= [\mu(r, t) + i\nu(r, t) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \xi,
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный радиальный трех-вектор, а  $\xi$  — произвольный единичный двухкомпонентный столбец. Такая подстановка инвариантна относительно пространственных вращений, дополненных соответствующим глобальным калибровочным преобразованием и вращением из глобальной конспиративной SU(2) симметрии [85]. В терминах новых полевых пере-

менного действие (1.1) принимает вид

$$S = \int dt \int_0^\infty dr \left[ \frac{1}{4} r^2 \dot{f}_{\mu\nu} \dot{f}_{\mu\nu} + (\bar{D}_\mu \bar{\chi}) D_\mu \chi + r^2 (\bar{D}_\mu \bar{\phi}) D_\mu \phi - \frac{1}{2r^2} (\bar{\chi} \chi - 1)^2 - \frac{1}{2} (\bar{\chi} \chi + 1) \bar{\phi} \phi - \frac{i}{2} \bar{\chi} \phi^2 + \frac{i}{2} \chi \bar{\phi}^2 - \lambda r^2 (\bar{\phi} \phi - 1)^2 \right] \quad (2.2)$$

где индексы  $\mu, \nu$  пробегает значения 0 и 1, а «тензор напряженности», «ковариантная производная» и поля  $\chi, \phi$  определены следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{f}_{\mu\nu} &= \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu \\ \chi &= \alpha + i\beta & \bar{\chi} &= \alpha - i\beta \\ \phi &= \mu + i\nu & \bar{\phi} &= \mu - i\nu \\ D_\mu \chi &= (\partial_\mu - ia_\mu) \chi & \bar{D}_\mu \bar{\chi} &= (\partial_\mu + ia_\mu) \bar{\chi} \\ D_\mu \phi &= (\partial_\mu - \frac{i}{2} a_\mu) \phi & \bar{D}_\mu \bar{\phi} &= (\partial_\mu + \frac{i}{2} a_\mu) \bar{\phi}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что черта над  $\phi, \chi$  и  $D_\mu$  обозначает лишь замену  $i \rightarrow -i$  в определениях (2.3), что совпадает с комплексным сопряжением *только* если все шесть полей  $a_\mu, \alpha, \beta, \mu$  и  $\nu$  действительны. При формулировке граничной задачи (1.20) эти поля станут комплекснозначными, и черта не будет соответствовать нормальному комплексному сопряжению. Другими словами,  $\phi$  и  $\bar{\phi}$  должны будут рассматриваться как два независимых комплексных поля.

Уравнения движения, получаемые из действия (2.2), имеют вид

$$\partial_1(r^2 f_{01}) = i[\chi \bar{D}_0 \bar{\chi} - \bar{\chi} D_0 \chi] + \frac{i}{2} r^2 [\phi \bar{D}_0 \bar{\phi} - \bar{\phi} D_0 \phi] \quad (2.4a)$$

$$\partial_0(r^2 f_{01}) = i[\chi \bar{D}_1 \bar{\chi} - \bar{\chi} D_1 \chi] + \frac{i}{2} r^2 [\phi \bar{D}_1 \bar{\phi} - \bar{\phi} D_1 \phi] \quad (2.4b)$$

$$\left[ D_\mu D_\mu + \frac{1}{r^2} (\bar{\chi} \chi - 1) + \frac{1}{2} \bar{\phi} \phi \right] \chi = -\frac{i}{2} \phi^2 \quad (2.4c)$$

$$\left[ \bar{D}_\mu \bar{D}_\mu + \frac{1}{r^2} (\bar{\chi} \chi - 1) + \frac{1}{2} \bar{\phi} \phi \right] \bar{\chi} = -\frac{i}{2} \bar{\phi}^2 \quad (2.4d)$$

$$\left[ D_\mu r^2 D_\mu + \frac{1}{2} (\bar{\chi} \chi + 1) + 2\lambda r^2 (\bar{\phi} \phi - 1) \right] \phi = i\chi \bar{\phi} \quad (2.4e)$$

$$\left[ \bar{D}_\mu r^2 \bar{D}_\mu + \frac{1}{2} (\bar{\chi} \chi + 1) + 2\lambda r^2 (\bar{\phi} \phi - 1) \right] \bar{\phi} = i\bar{\chi} \phi. \quad (2.4f)$$

Первое из них (2.4a) первого порядка по времени и является законом Гаусса.

Сферическая подстановка (2.1) обладает остаточной U(1) калибровочной инвариантностью

$$\begin{aligned} a_\mu &\rightarrow a_\mu + \partial_\mu \Omega \\ \chi &\rightarrow e^{i\Omega} \chi \\ \phi &\rightarrow e^{i\Omega/2} \phi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\Omega(r, t)$  — калибровочная функция. Комплексные «скалярные» поля  $\chi$  и  $\phi$  имеют U(1) заряды 1 и 1/2, соответственно. При численном решении уравнений поля необходимо зафиксировать эту остаточную калибровочную инвариантность. Мы будем работать в калибровке  $a_0 = 0$ . В этой калибровке остается пять свободных полей и пять уравнений движения второго порядка по времени (2.4b)–(2.4f). Выполнение закона Гаусса достаточно потребовать в некоторый один момент времени, при этом за счет пяти оставшихся уравнений движения он будет выполняться всегда. Это,

в частности, означает, что одно из уравнений вырождено, а одно из полей не является физическим, т.е. оно может быть выражено через остальные поля и их производные с помощью закона Гаусса. Однако, с вычислительной точки зрения, удобнее иметь дело с пятью однотипными уравнениями второго порядка по времени, а выполнение закона Гаусса обеспечивать с помощью граничных условий.

Кроме этого, в калибровке  $a_0 = 0$  остается калибровочная свобода относительно не зависящих от времени калибровочных преобразований, которая тоже должна быть зафиксирована граничными условиями.

Тривиальный пространственно однородный вакуум модели имеет вид

$$\chi_{\text{vac}} = -i, \quad \phi_{\text{vac}} = \pm 1, \quad a_{1 \text{ vac}} = 0. \quad (2.6)$$

Все другие вакуумы могут быть получены из тривиального с помощью калибровочных преобразований вида

$$a_{1 \text{ vac}} = \frac{\partial \Omega(r)}{\partial r} \quad (2.7a)$$

$$\chi_{\text{vac}} = -ie^{i\Omega(r)} \quad (2.7b)$$

$$\phi_{\text{vac}} = \pm e^{i\Omega(r)/2}. \quad (2.7c)$$

Непрерывность полей требует, чтобы  $\Omega(r)$  обращалось в ноль в начале координат. Вакуумы с разным топологическим числом  $n$  соответствуют  $\Omega \rightarrow 2n\pi$  при  $r \rightarrow \infty$ . При этом поля исходной четырехмерной модели не зависят от направления при стремлении к пространственной бесконечности, что является обычным выбором в рассмотрении вакуумной структуры калибровочных моделей. При этом топологическое описание структуры вакуума особенно просто — так как сфера  $S^2$  пространственных бесконечностей отображается в одну точку в пространстве полей, можно компакти-

фицировать пространство в  $S^3$  и рассматривать отображения  $S^3 \rightarrow SU(2)$ , соответствующие чисто калибровочным конфигурациям. Такие отображения, очевидно, характеризуются целым топологическим числом.

Возможен и другой выбор калибровочной функции  $\Omega(r)$  на пространственной бесконечности (постольку в любом случае поля (2.7) представляют чистую калибровку и не зависят от времени). В нашем случае оказывается удобным выбрать  $\Omega \rightarrow (2n - 1)\pi$  при  $r \rightarrow \infty$ . В исходной четырехмерной теории такой выбор, который мы будем называть «калибровкой периодического инстантона», соответствует отображению сферы  $S^2$  пространственных бесконечностей в экваториальную сферу  $S^2$  калибровочной группы  $SU(2)$ . Такое поведение функции  $\Omega$  эквивалентно тому, что при  $r = 0$  и  $r = \infty$  накладываются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \chi|_{r \rightarrow 0} &\rightarrow -i & \chi|_{r \rightarrow \infty} &\rightarrow i \\ \partial_r \phi + \partial_r \bar{\phi}|_{r \rightarrow 0} &\rightarrow 0 & \phi|_{r \rightarrow \infty} &\rightarrow i \\ \phi - \bar{\phi}|_{r \rightarrow 0} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Условия на поле  $\phi$  при  $r \rightarrow 0$  обеспечивает гладкое поведение поля  $\Phi$  исходной четырехмерной модели в начале координат.

В такой калибровке отсутствует пространственно-однородный вакуум, зато переходы между вакуумами с  $n = 0$  и  $n = 1$  описываются чрезвычайно симметричным образом. Поведение полей  $\chi$  и  $\phi$  при таком переходе проиллюстрировано на рис. 2.1. На языке исходной четырехмерной модели такой процесс соответствует переходу, при котором калибровочная функция, описывающая вакуумную конфигурацию, принимает значения на нижней полусфере  $SU(2)$  до перехода, и на верхней полусфере после перехода.

Начальные  $\theta$ -граничные условия в калибровочной теории выглядят до-

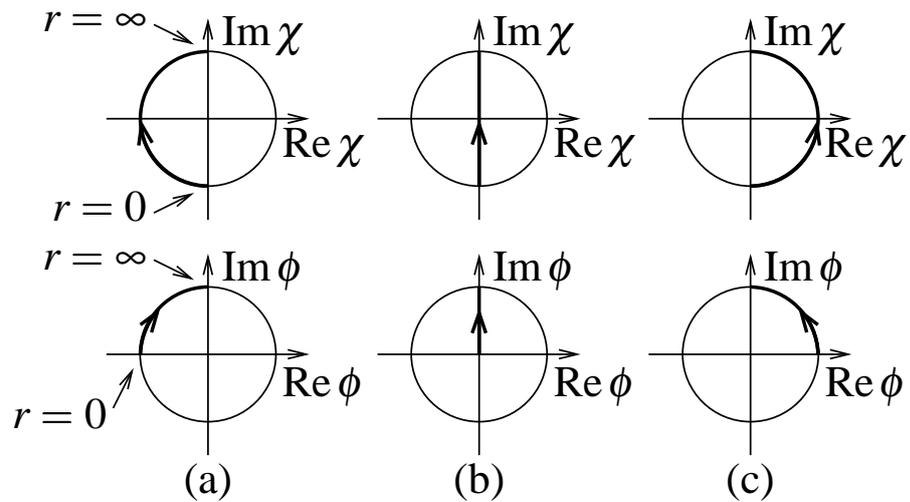


Рис. 2.1. Топологический переход в  $SU(2)$  модели с механизмом Хиггса: поведение полей  $\phi$  и  $\chi$ . Жирные стрелки показывают направление изменения поля при увеличении радиальной координаты от  $r = 0$  до  $r = \infty$ . Конфигурации полей: (a) до перехода (b) в середине процесса, (c) после перехода.

вольно сложным образом. Причина этого кроется в том, что среди полей  $a_1$ ,  $\phi$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $\chi$ ,  $\bar{\chi}$  одно не является физическим, тогда как  $\theta$ -граничные условия (1.20b) должны накладываться только на физические поля. Аналитические выражения физических частотных мод  $f_k$ ,  $g_k$  через поля  $\chi$ ,  $\phi$ ,  $a_1$  довольно громоздки (см. [60, 86]) и здесь не приводятся. Проще, и, более того, точнее в дискретизованном случае, произвести разложение по модам численно в решеточной версии гамильтониана модели. Это разложение будет подробнее рассмотрено при описании дискретизации уравнений.

Чтобы завершить формулировку граничной задачи необходимо добавить закон Гаусса и уравнение, фиксирующее не зависящую от времени остаточную калибровочную инвариантность. Заметим, что оба этих уравнения не являются полными комплекснозначными уравнениями (какими являются  $\theta$ -граничные условия), иначе система уравнений будет избыточной. Про-

исходит это потому, что условия действительности на конечном участке контура (1.20с) запрещают калибровочные преобразования с комплексной калибровочной функцией  $\Omega(r)$ , а также обеспечивают обращение в ноль мнимой части закона Гаусса. Таким образом, следует использовать только действительную часть закона Гаусса (2.4а) и уравнение, фиксирующее только действительные калибровочные преобразования. Вместе с четырьмя  $\theta$  граничными условиями это как раз составляет необходимое количество граничных условий — пять (комплексных) уравнений — для системы с пятью комплекснозначными полями  $a_1, \alpha, \beta, \mu, \nu$ . Явный вид уравнения, фиксирующего калибровку, тоже будет приведен в 2.2, так как и он удобнее всего формулируется в решеточных терминах.

Еще одной сложностью граничной задачи является ее инвариантность относительно сдвигов вдоль действительного времени. Эта инвариантность должна быть ликвидирована для успешного численного решения уравнений, причем контролируемым образом — иначе невозможно избежать пересечения контура в комплексном времени и особыми точками решения. Метод фиксации этой нулевой моды тоже будет описан в разделе 2.2.

## 2.2 Разностная форма граничной задачи

**2.2.1 Дискретизация действия** Чтобы получить непротиворечивую систему уравнений в дискретизованном случае, требуется сохранить калибровочную инвариантность при формулировке решеточной версии уравнений движения (2.4b)–(2.4f).

Удобно сначала записать дискретизованную версию действия (2.2). Для этого введем пространственную решетку с узлами  $r_i, i = 0, \dots, N$ , причем

$r_0 = 0$ ,  $r_N = L$ . Временная решетка состоит из узлов  $t_j$ ,  $j = -1, \dots, N_t + 1$ . Так как мы будем работать в калибровке  $a_0 = 0$ , то лоренцев индекс у пространственной компоненты калибровочного поля записываться не будет,  $a_1(r, t) \equiv a(r, t)$ . Полевые переменные  $\chi_{ij}$ ,  $\bar{\chi}_{ij}$  и  $\phi_{ij}$ ,  $\bar{\phi}_{ij}$  соответствуют значениям полей в узлах решетки, а  $a_{ij}$  определены на пространственных ребрах решетки. Кроме этого, множитель  $\Delta r_i$  включается в определение  $a_{ij}$ . Граничные условия, соответствующие калибровке типа периодического инстантона (2.8), принимают вид

$$\chi_{0j} = -i \qquad \chi_{Nj} = i \qquad (2.9a)$$

$$\bar{\chi}_{0j} = i \qquad \bar{\chi}_{Nj} = -i \qquad (2.9b)$$

$$\phi_{0j} = \frac{1}{2} \left\{ e^{-ia_{0j}/2} \phi_{1j} + e^{ia_{0j}/2} \bar{\phi}_{1j} \right\} \qquad \phi_{Nj} = i \qquad (2.9c)$$

$$\bar{\phi}_{0j} = \phi_{0j} \qquad \bar{\phi}_{Nj} = -i \qquad (2.9d)$$

для всех  $j$ . В условии на  $\phi_{0j}$ , пространственная производная в уравнении (2.8) была, кроме того, заменена на ковариантную производную, что непринципиально в континуальном пределе, но позволяет сохранить точную решеточную калибровочную инвариантность в дискретном случае. Таким образом, на решетке имеются следующие комплекснозначные полевые переменные

$$\begin{array}{lll} \chi_{ij}, \bar{\chi}_{ij}, \phi_{ij}, \bar{\phi}_{ij} & i = 1, \dots, N - 1 & j = -1, \dots, N_t + 1 \\ a_{ij} & i = 0, \dots, N - 1 & j = -1, \dots, N_t + 1. \end{array}$$

Дискретизованное действие имеет вид

$$\begin{aligned}
S &= (S_{\text{ff}} + S_{\text{t}} + S_{\text{r}} + S_{\text{int}}) \tag{2.10} \\
S_{\text{ff}} &= \sum_{j=-1}^{N_t} \sum_{i=0}^{N-1} v_{1,j} \omega_{1,i} (1 - \cos(a_{i,j+1} - a_{ij})) \\
S_{\text{t}} &= \sum_{j=-1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N-1} v_{1,j} \left\{ \omega_{3,i} (\bar{\chi}_{i,j+1} - \bar{\chi}_{ij}) (\chi_{i,j+1} - \chi_{ij}) \right. \\
&\quad \left. + \omega_{4,i} (\bar{\phi}_{i,j+1} - \bar{\phi}_{ij}) (\phi_{i,j+1} - \phi_{ij}) \right\} \\
S_{\text{r}} &= - \sum_{j=-1}^{N_t} \sum_{i=0}^{N-1} v_{2,j} \left\{ \omega_{2,i} (e^{ia_{ij}} \bar{\chi}_{i+1,j} - \bar{\chi}_{ij}) (e^{-ia_{ij}} \chi_{i+1,j} - \chi_{ij}) \right. \\
&\quad \left. + \omega_{1,i} (e^{ia_{ij}/2} \bar{\phi}_{i+1,j} - \bar{\phi}_{ij}) (e^{-ia_{ij}/2} \phi_{i+1,j} - \phi_{ij}) \right\} \\
S_{\text{int}} &= - \sum_{j=-1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N-1} v_{2,j} \left\{ \omega_{5,i} \frac{1}{2} (\bar{\chi}_{ij} \chi_{ij} - 1)^2 \right. \\
&\quad \left. + \omega_{3,i} \left[ \frac{1}{2} (\bar{\chi}_{ij} \chi_{ij} + 1) \bar{\phi}_{ij} \phi_{ij} + \frac{i}{2} \bar{\chi}_{ij} \phi_{ij}^2 - \frac{i}{2} \chi_{ij} \bar{\phi}_{ij}^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \lambda \omega_{4,i} (\bar{\phi}_{ij} \phi_{ij} - 1)^2 \right\},
\end{aligned}$$

с весами

$$\begin{aligned}
v_{1,j} &= 1/\Delta t_{j+1/2} & v_{2,j} &= h_j \Delta t_j \\
\omega_{1,i} &= r_{i+1/2}^2 / \Delta r_{i+1/2} & \omega_{2,i} &= 1/\Delta r_{i+1/2} & \omega_{3,i} &= \Delta r_i \\
\omega_{4,i} &= r_i^2 \Delta r_i & \omega_{5,i} &= \Delta r_i / r_i^2
\end{aligned}$$

где  $\Delta t_{j+1/2} = t_{j+1} - t_j$ ,  $\Delta t_j = (\Delta t_{j+1/2} + \Delta t_{j-1/2})/2$ , выражения для  $\Delta r_i$  имеют аналогичный вид; а  $h_j = 1$  для  $j = 0, N_t$  и  $1/2$  для  $j = -1, N_t + 1$ . Решеточные уравнения поля получаются с помощью варьирования по решеточным полевым переменным действия (2.10), в котором поля на границе  $\chi_{0j}, \bar{\chi}_{0j}, \phi_{0j}$ ,

$\bar{\phi}_{0j}$  и  $\chi_{Nj}$ ,  $\bar{\chi}_{Nj}$ ,  $\phi_{Nj}$ ,  $\bar{\phi}_{Nj}$  предварительно исключены с помощью граничных условий (2.9).

Заметим, что действие (2.10) является инвариантным относительно не зависящих от времени решеточных калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} a_{ij} &\rightarrow a_{ij} + \Omega_{i+1} - \Omega_i, \\ \chi_{ij} &\rightarrow e^{i\Omega_i} \chi_{ij}, \\ \phi_{ij} &\rightarrow e^{-\Omega_j/2} \phi_{ij}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для возможности однозначного численного решения уравнений эту калибровочную свободу необходимо будет зафиксировать в граничных условиях.

**2.2.2 Граничный член: разложение по собственным модам** Чтобы записать граничное условие (1.20b) необходимо произвести разложение по нормальным модам. Вообще говоря, на решетке собственные моды более не являются сферическими волнами, как в непрерывном случае. Чтобы получить аналог сферических волн на решетке, рассмотрим квадратичную часть действия (2.10) в пределе непрерывного времени (вообще говоря, при этом мы рассматриваем просто квантово-механическую систему с большим числом степеней свободы) и приведем ее к каноническому виду. Разложение произведем около тривиального вакуума (2.6)

$$\begin{aligned} \chi &= -i - \tilde{\chi} & \bar{\chi} &= i - \tilde{\bar{\chi}} \\ \phi &= -1 + i\tilde{\phi} & \bar{\phi} &= -1 - i\tilde{\bar{\phi}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

(калибровочное преобразование, переводящее конфигурацию в калибровке типа периодического инстантона (2.8) в окрестность этого вакуума, имеет очевидный вид, и будет рассмотрено позднее). Удобно также перейти к

«действительным» полям (см. (2.3)),

$$\begin{aligned}\tilde{\chi} &= \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta} & \bar{\tilde{\chi}} &= \tilde{\alpha} - i\tilde{\beta} \\ \tilde{\phi} &= \tilde{\mu} + i\tilde{\nu} & \bar{\tilde{\phi}} &= \tilde{\mu} - i\tilde{\nu}\end{aligned}$$

В этих обозначениях квадратичная часть действия (2.10) имеет вид

$$\begin{aligned}S^{(2)} &= \frac{1}{2} \int dt \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \omega_{1,i} \dot{\alpha}_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \left( 2\omega_{3,i} \dot{\alpha}_i^2 + 2\omega_{3,i} \dot{\beta}_i^2 + 2\omega_{4,i} \dot{\mu}_i^2 + 2\omega_{4,i} \dot{\nu}_i^2 \right) \right\} \\ &- \frac{1}{2} \int dt \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} 2\omega_{2,i} \left[ (a_i + \tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\alpha}_i)^2 + (\tilde{\beta}_{i+1} - \tilde{\beta}_i)^2 \right] \right. \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} 2\omega_{1,i} \left[ (a_i/2 + \tilde{\mu}_{i+1} - \tilde{\mu}_i)^2 + (\tilde{\nu}_{i+1} - \tilde{\nu}_i)^2 \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} (4\omega_{5,i} + \omega_{3,i}) \tilde{\beta}_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \omega_{3,i} \left[ \tilde{\alpha}_i^2 - 4\tilde{\alpha}_i \tilde{\mu}_i + 4\tilde{\mu}_i^2 \right] \\ &\quad \left. + 8\lambda \sum_{i=1}^{N-1} \omega_{4,i} \tilde{\nu}_i^2 \right\}. \quad (2.13)\end{aligned}$$

Заметим, что переменные  $\tilde{\alpha}_0$ ,  $\tilde{\beta}_0$ ,  $\tilde{\mu}_0$  и  $\tilde{\nu}_0$  не имеют кинетического члена. Первые три из них определяются с помощью граничного условия при  $r = 0$ ,

$$\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\beta}_0 = \tilde{\mu}_0 = 0.$$

Четвертая,  $\tilde{\nu}_0$ , может быть исключена с помощью соответствующего уравнения движения:

$$\tilde{\nu}_0 = \tilde{\nu}_1.$$

После того, как переменные с  $i = 0$  исключены, квадратичная часть действия принимает вид

$$S = \int dt \left( \sum_I \frac{1}{2} d_I^2 \dot{\tilde{\phi}}_I^2 - \sum_{I,J} \frac{1}{2} \tilde{\phi}_I S_{IJ} \tilde{\phi}_J \right),$$

где действительные коэффициенты  $d_I$  и  $S_{IJ}$  легко получить из выражения (2.13), индексы  $I, J$  нумеруют как пространственную координату, так и тип поля, а  $\tilde{\varphi}_I$  обозначает набор полей  $\{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, \tilde{\mu}_i, \tilde{\nu}_i, a_i\}$ . С помощью замены переменных

$$y_I = d_I \tilde{\varphi}_I$$

кинетический член действия приводится к каноническому виду,

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} \dot{y}_I^2 - \frac{1}{2} y_I \tilde{S}_{IJ} y_J \right),$$

где

$$\tilde{S}_{IJ} = \frac{1}{d_I} S_{IJ} \frac{1}{d_J}.$$

Симметричная матрица  $\tilde{S}_{IJ}$  может быть диагонализирована,

$$\tilde{S}_{IJ} = O_{IK}^T \omega_K^2 O_{KJ},$$

где  $O_{KJ}$  — ортогональная матрица. После замены переменных  $y_J \rightarrow z_J$  вида

$$O_{KJ} y_J = z_K; \quad y_J = O_{JK}^T z_K,$$

действие принимает диагональный канонический вид

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} \dot{z}_I^2 - \frac{1}{2} \omega_I^2 z_I^2 \right).$$

Таким образом, вектора

$$\xi_{(K)I} = O_{KI}$$

отвечают в решеточной формулировке теории нормальным модам, и именно их следует использовать вместо обычных сферических волн при формулировке  $\theta$ -граничных условий. Соответствующие собственные частоты — это  $\omega_K^2$ .

Матрица  $O_{KI}$  и частоты  $\omega_K$  могут быть найдены численно. Так как они зависят только от параметров пространственной решетки (от размера и шага, в случае однородной решетки) и константы связи  $\lambda$ , и не зависят от фоновой (вакуумной) конфигурации полей, то численную процедуру диагонализации действия можно производить только один раз для каждого типа решетки.

Только первые  $4N - 3$  собственных векторов  $\xi_{(K)I}$  соответствуют физическим модам и имеют отличные от нуля собственные значения  $\omega_K$ . Оставшиеся  $N - 1$  собственных векторов имеют нулевые собственные значения  $\omega = 0$ , и соответствуют калибровочным (нефизическим) степеням свободы. Отметим еще раз, что решеточное калибровочное преобразование (2.11) имеет ровно  $N - 1$  параметров.

### 2.2.3 Граничные условия.

**$\theta$  граничные условия.** Решеточную версию граничных условий проще всего получить варьируя показатель экспоненты для полной вероятности туннелирования (1.8) по граничным значениям полей. Он может быть записан в виде

$$iS(z) - iS(z') - \frac{1}{2} \frac{\omega}{1 - \gamma^2} \left\{ (1 + \gamma^2)(z_{-1}^2 + z'_{-1}{}^2) - 4\gamma z_{-1} z'_{-1} \right\} + \dots \quad (2.14)$$

где многоточие обозначает слагаемые, не дающие вклада в граничные условия, а  $\gamma = e^{-\theta}$ . Следует проварьировать дискретизованную версию (2.14) по  $z_{I,-1}$  (значениям  $z$  в первом временном слое) и положить затем  $z' = z^*$ . Вариационное уравнение имеет вид

$$i \frac{\delta S}{\delta z_{I,-1}} - \frac{\omega_I}{1 - \gamma^2} (1 + \gamma^2) z_{I,-1} + \frac{2\omega_I \gamma}{1 - \gamma^2} z_{I,-1}^* = 0$$

что приводит к

$$\frac{\delta S}{\delta z_{I,-1}} + i \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \omega_I \operatorname{Re} z_{I,-1} - \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \omega_I \operatorname{Im} z_{I,-1} = 0. \quad (2.15)$$

где производные действия по граничным значениям поля равны классическим импульсам соответствующих нормальных мод:

$$\frac{\delta S}{\delta z_{I,-1}} = -v_{1,-1}(z_{I,0} - z_{I,-1}).$$

Здесь индекс  $I = 1, \dots, 4N - 3$  нумерует физические степени свободы. При этом дискретная версия граничного члена (1.18) в показателе подавления принимает вид

$$\operatorname{Re} \mathcal{B} = - \sum_I \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \omega_I (\operatorname{Re} z_{I,-1})^2 + \sum_I \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \omega_I (\operatorname{Im} z_{I,-1})^2 \quad (2.16)$$

Можно вернуться к исходным полевым переменным с помощью соотношения

$$z_I = \xi_{IJ} d_J \tilde{\varphi}_J,$$

где  $I = 1, \dots, 4N - 3$ .

Наконец, для преобразования полей из калибровки периодического инстантона (2.8) к виду  $\tilde{\varphi}_J$  (2.12) используется калибровочное преобразование

$$\Omega_i = \pi \exp \left( - \frac{r_i}{c(L - r_i)} \right)$$

где в вычислениях использовалась константа  $c = 0.5$ . (Другие калибровочные преобразования тоже допустимы<sup>1</sup>, при условии  $\Omega(0) = \pi$ ,  $\Omega(L) = 0$ ).

Это преобразование имеет вид

$$\tilde{\varphi}_J = g_{KJ} \varphi_J - \tilde{\varphi}_J^{\text{vac}}, \quad (2.17)$$

---

<sup>1</sup>Удобно также иметь  $\Omega'(L) = 0$ , так как при этом калибровочное поле на границе обращается в ноль вместе с пространственными производными хиггсовских полей, что позволяет легко продолжить полевою конфигурацию на решетку большего пространственного размера.

где  $\varphi_J$  обозначает поля модели  $\alpha_j, \beta_j, \mu_j, \nu_j, a_j$  в калибровке периодического инстантона. Матрица  $g_{KL}$  и вектор  $\tilde{\varphi}_J^{\text{vac}}$  легко могут быть построены из выражения для калибровочного преобразования (2.11) и определения (2.12).

**Калибровочные степени свободы.**  $\theta$ -граничные условия (2.15) образуют  $4N - 3$  (комплексных) уравнений, а для полной формулировки граничной задачи требуется  $5N - 4$  граничных условий при начальном времени. Оставшиеся  $N - 1$  условий соответствуют  $N - 1$  калибровочным (нефизическим) степеням свободы в модели в калибровке  $a_0 = 0$ . Как было описано в разделе 2.1, вместо граничных условий на эти моды следует использовать  $N - 1$  (действительных) уравнений, образующих действительную часть закона Гаусса (2.4a),

$$\text{Re} \left[ \omega_{1,i-1} \sin(a_{i-1,-1} - a_{i-1,0}) - \omega_{1,i} \sin(a_{i,-1} - a_{i,0}) + i\omega_{3,i} (\bar{\chi}_{i,-1} \chi_{i,0} - \chi_{i,-1} \bar{\chi}_{i,0}) + \frac{i}{2} \omega_{4,i} (\bar{\phi}_{i,-1} \phi_{i,0} - \phi_{i,-1} \bar{\phi}_{i,0}) \right] = 0, \quad (2.18)$$

где  $i = 1, \dots, N - 1$ . Кроме этого, необходимо зафиксировать оставшуюся калибровочную свободу относительно *действительных* калибровочных преобразований. Это делается с помощью требования

$$\text{Re } z_{L,-1} = 0 \quad (2.19)$$

для всех  $L = 4N - 2, \dots, 5N - 4$ . Соответствующие этим модам частоты равны нулю,  $\omega_L = 0$ , и отвечают нефизическим степеням свободы, изменяющимся при калибровочных преобразованиях. Таким образом, уравнение (2.19) полностью фиксирует калибровочную свободу с действительными калибровочными функциями. Калибровочные преобразования с мнимыми функциями невозможны, так как они противоречат условиям действительности полей, налагаемым на конечном участке контура (заметим, что

сами уравнения поля инвариантны относительно *комплексных* калибровочных преобразований). Кроме того, действительность полей в конечном состоянии обеспечивает действительность закона Гаусса, и явно требовать равенства нулю его мнимой части не требуется.

**Граничные условия на участке D.** Условия действительности на участке D контура (1.20с) несложно записать в дискретизованном виде. В предположении, что последние две точки временной решетки,  $N_t$  и  $N_t + 1$ , находятся на действительной оси времени, они принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \alpha_{i,N_t} &= \operatorname{Im} \beta_{i,N_t} = 0 \\ \operatorname{Im} \mu_{i,N_t} &= \operatorname{Im} \nu_{i,N_t} = \operatorname{Im} a_{i,N_t} = 0 \\ \operatorname{Im} \alpha_{i,N_t+1} &= \operatorname{Im} \beta_{i,N_t+1} = 0 \\ \operatorname{Im} \mu_{i,N_t+1} &= \operatorname{Im} \nu_{i,N_t+1} = \operatorname{Im} a_{i,N_t+1} = 0 . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Заметим, что требование нахождения двух последних точек на действительной оси не вызывает никаких неудобств, так как любую решетку можно дополнить соответствующим образом.

Для энергий меньших, чем энергия бифуркации  $E_1(N)$ , решение тождественно действительно на действительной оси времени, и граничное условие (2.20) можно накладывать в любой удобный момент времени. В реальных вычислениях контур выбирался так, что вершина решетки  $N_t$  совпадала с точкой C контура (таким образом, на действительной оси оказывается только две точки решетки,  $N_t$  и  $N_t + 1$ ).

Для энергий больших  $E_1(N)$  решение граничной задачи действительно лишь асимптотически, и накладывать условие (2.20), вообще говоря, нельзя. В этом случае следует применять регуляризованную версию гра-

ничной задачи, описанную в разделе 2.5. Граничное условие (2.20) при этом не меняется, но часть CD контура делается настолько длинной, насколько это возможно<sup>2</sup> (см. раздел 2.5).

**Фиксация инвариантности относительно временных сдвигов.** Дополнительной сложностью является наличие у граничной задачи (1.20) инвариантности относительно трансляций вдоль действительного времени (в непрерывном пределе как уравнения, так и граничные условия, инвариантны относительно такого сдвига). Следовательно, чтобы полностью определить решение граничной задачи необходимо зафиксировать позицию решения во времени. Заметим, что инвариантность относительно сдвигов по времени сохраняется только до тех пор, пока контур не пересекает сингулярные точки решения в комплексном времени. Чтобы это предотвратить, необходимо контролировать положения контура во времени относительно сингулярностей.

В дискретизованных уравнениях описанная инвариантность явно нарушена эффектами дискретизации и конечностью объема. Первые для использовавшихся в вычислениях в  $SU(2)$  модели параметров решетки малы и не приводят к наблюдаемым эффектам. Эффект же конечности объема, или, другими словами, эффект нелинейности в  $\theta$ -граничных условиях, достаточно силен, и пропадает только при начальных временах  $T_i$  много больших, чем достижимые в численных расчетах. Отметим, что эффекты нелинейности в  $\theta$ -граничных условиях в силу случайных обстоятельств сокращаются не только при стремлении начального времени к бесконечности, но и если наложить  $\theta$ -граничные условия в некоторый определен-

---

<sup>2</sup>Реально это означает, что часть CD должна быть достаточно длинной, чтобы конфигурация типа сфалерона, образующаяся после туннелирования, начала распадаться на сферические волны.

ный (конечный и небольшой) момент времени. Это позволяет, казалось бы, решить описанную решеточную граничную задачу без дополнительной фиксации трансляционной инвариантности во времени. Однако при этом система оказывается довольно далеко от линейного режима в начальный момент времени, и интерпретация получаемых решений невозможна. Заметим еще, что при решении задачи о распаде ложного вакуума [53] линеаризация наступает значительно быстрее, и можно добиться того, чтобы эффекты дискретизации и эффекты нелинейности начального состояния были одного порядка.

Оба эффекта не позволяют контролировать положение контура относительно точек ветвления решения в комплексной плоскости.

Наличие в граничной задаче описанной инвариантности означает, что одно из уравнений вырождено (если пренебречь эффектами дискретизации и конечного объема), и может быть опущено. В качестве такого уравнения нами было выбрано одно из *действительных* уравнений, составляющих  $\theta$ -граничное условие (1.20b)

$$\arg f_{\mathbf{k}} = \arg g_{\mathbf{k}} , \quad (2.21)$$

для некоторой определенной моды  $\mathbf{k}$  (это наиболее удобный выбор, хотя другие тоже возможны). При условии, что система находится в линейном режиме на начальном участке контура, это уравнение следует из остальных. Действительно, условия действительности на конечном участке контура обеспечивают действительность (сохраняющейся) энергии. Следовательно линеаризованная энергия (1.21) действительна в начальный момент времени. Тогда одна из мод автоматически удовлетворяет условию (2.21), если все остальные моды удовлетворяют  $\theta$ -граничным условиям (1.20b).

Таким образом, возможна следующая модификация уравнений. Одно из уравнений (1.20b) заменяется на

$$|\dot{f}_k| = e^{-\theta} |g_k| ,$$

или, в дискретизованном виде (см. (2.15)),

$$(1 - \gamma^2) \left[ \left| \frac{\delta S}{\delta z_{K,-1}} \right|^2 + \omega_K^2 |z_{K,-1}|^2 \right] - 2\omega_K (1 + \gamma^2) \left[ \operatorname{Re} \frac{\delta S}{\delta z_{K,-1}} \operatorname{Im} z_{K,-1} - \operatorname{Im} \frac{\delta S}{\delta z_{K,-1}} \operatorname{Re} z_{K,-1} \right] = 0 . \quad (2.22)$$

Соответственно, вместо уравнения (2.21) накладывается трансляционно неинвариантное граничное условие. Выбор последнего определяется исключительно соображениями удобства. Мы контролируем положение решения во времени, с помощью условия, которое фиксирует «центр масс» поля  $\chi$  в начальный момент времени на расстоянии  $R$  от начала координат:

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{N-1} \omega_{4,i} (r_i - R) (\chi_{i,-1} \bar{\chi}_{i,-1} - 1)^2 = 0 . \quad (2.23)$$

Такое предписание работает в том случае, если мода  $z_K$ , входящая в уравнение (2.22), достаточно заселена в исходном состоянии, иначе «выкидываемое» уравнение (2.21), почти вырождено. С учетом этого замечания результаты вычислений зависят от выбора моды незначительным образом.

С другой стороны, относительная фаза между  $\dot{f}_k$  и  $g_k$  может использоваться для проверки вычислений. В линейном режиме она должна равняться нулю, и, таким образом, реальное значение этой фазы показывает, насколько близко к линейному режиму система находится в начальный момент времени.

В заключение, перечислим все уравнения, составляющие граничную задачу на решетке. Это полевые уравнения, получаемые вариацией действия (2.10) во всех внутренних узлах решетки ( $i = 1, \dots, N - 1, j = 0, \dots, N_t$ , всего  $(5N - 4)(N_t + 1)$  уравнений), условия действительности на конечном участке контура (2.20) ( $N - 1$  уравнений),  $\theta$  граничные условия (2.15) для всех физических мод, кроме одной моды  $z_K$  ( $4N - 4$  уравнений), действительная часть закона Гаусса (2.18) ( $N - 1$  действительных уравнений), равенство нулю действительных частей нулевых мод (2.19), фиксирующее калибровку ( $N - 1$  действительных уравнений), и, наконец, пара действительных уравнений (2.22), (2.23) (одно комплекснозначное уравнение). Вместе это дает  $(5N - 4)(N_t + 3)$  комплексных уравнений для такого же числа неизвестных.

### 2.3 Поиск решений

Описанные уравнения образуют систему дискретизованных дифференциальных уравнений в частных производных, которые имеют гиперболический вид на минковских участках контура и эллиптический вид на евклидовом участке. Преобразовать данную граничную задачу к начальной невозможно, и необходимо решать имеющуюся систему уравнений глобально, как набор нелинейных уравнений во всех узлах решетки.

Для решения нелинейных уравнений применяется вариант многомерного метода Ньютона–Рафсона, дающий решение с помощью итеративной процедуры. На каждом шагу решаются *линеаризованные* уравнения на фоне текущего приближения. Следующее приближение получается после добавления полученного решения к фоновому, после чего процедура по-

вторяется. Преимуществом этого метода является то, что он не требует положительной определенности матрицы вторых производных. Он однако, чувствителен к наличию нулевых мод (нулевых собственных значений в матрице вторых производных). Это свойство является даже некоторым плюсом метода, так как позволяет проверить тот факт, что при изменении параметров не появляется дополнительных семейств решений. Отметим однако, что не все бифуркации решений приводят к появлению нулевых мод в дискретизованной задаче — примером тому является как раз бифуркация при  $E_1(N)$ . Связано это с тем, что новое семейство решений, появляющееся при этой энергии, хотя и удовлетворяет исходной аналитической задаче, не является решением дискретизованной версии уравнений.

При отсутствии нулевых мод сходимость алгоритма квадратичная; точность порядка  $10^{-9}$  достигается тогда за 3–5 итераций. В присутствии же нулевых мод сходимость значительно замедляется.

Линейные уравнения, получаемые на каждом итеративном шаге, имеют специальный блочно-треугольный вид. Эффективный метод численного решения таких линейных систем описан в дополнении А.

## 2.4 Решения при энергиях, меньших сфалеронной

Для применения метода Ньютона–Рафсона необходимо иметь хорошее начальное приближение для решения. Поэтому использовалась следующая стратегия: сначала находятся решения типа периодического инстантона, соответствующий  $\theta = 0$  [20], которые могут быть получены с помощью простой минимизации евклидова действия. После того, как периодические инстантоны найдены, параметры  $T$  и  $\theta$  меняются небольшими шагами, при

этом каждый раз в качестве начального приближения используется решение, полученное на предыдущем шаге. Не каждом шаге для полученного решения вычисляется энергия решения  $E$ , число частиц  $N$  и экспонента подавления  $F(E, N)$ .

Эта процедура проиллюстрирована на рис. 2.2, где каждая точка представляет одно решение граничной задачи. Исходные конфигурации периодических инстантонов соответствуют точкам на верхней левой линии. Начиная с этих точек увеличивалось  $\theta$ , и были получены линии постоянного  $T$ , вплоть до линии бифуркации. Данные, полученные таким образом, выстраиваются в почти прямые линии в левой части рис. 2.2.

Граничная задача (1.20)–(1.22) не фиксирует топологические свойства решения явно. Поэтому нет гарантии, что каждое полученное решение описывает переход между топологически различными секторами. Для случая  $\theta = 0$  это обеспечивается правильной топологической структурой периодических инстантонов. Но при ненулевом  $\theta$  необходимо проверять, что полученные решения действительно имеют правильные топологические свойства.

Топологические свойства решения связаны с поведением комплексных фаз полей, см. рис. 2.1. Очень полезным оказывается наглядное изображение полевой конфигурации. Пример такой визуализации для характерного поведения полей при относительно низкой энергии приведен на рис. 2.3. На нем изображено поведение поля  $\chi(r, t)$ , причем цвет отображает фазу поля. Евклидова часть эволюции наклонена, чтобы выделить ее по сравнению с минковскими частями. В начальном состоянии (левая часть поверхности), имеется возбуждение в виде сферической волны над вакуумом, движущейся к  $r = 0$ . Конечное состояние (правая часть поверхности) содержит

расходящуюся волну. Фаза поля себя ведет по разному в начальном и конечном состояниях. Это подтверждает то, что произошел топологический переход (сравните с верхними тремя изображениями на рис. 2.1). Можно отметить также несколько других важных свойств решения. Примерно в середине евклидова участка поле проходит через ноль  $\chi = 0$ , что обязательно происходит при переходе между соседними вакуумами; расходящаяся волна имеет широкий плавный профиль, что указывает на то, что после перехода рождается большое число (мягких) частиц; довольно узкая входящая волна свидетельствует о том, что в исходном состоянии заселены более энергичные моды, и, соответственно, число частиц меньше.

**2.4.1 Сравнение с аналитическим результатом** Интересно сравнить полученные численно результаты с имеющимся аналитическим предсказанием для низких энергий, описанным в главе 1. Так как аналитические результаты применимы только при низких энергиях, необходимо проэкстраполировать полученную численно  $F(E, N)$  в область  $E \rightarrow 0$ . Заметим, что в соответствии с уравнениями (1.36), (1.37), величина

$$W \equiv (1 - F(E, N))/f \propto \frac{1 - F(E, N)}{E^{4/3}}$$

зависит от энергии и числа частиц только в комбинации  $x \propto N/E^{4/3}$ , с точностью до поправок  $O(\alpha_W^2 E^2/M_W^2)$ . На графике 2.4 изображены функции  $W(x)$ , извлеченные из численных результатов для различных значений энергии, и аналитическое предсказание для предела малых энергий, полученное из (1.36), (1.37). Видно, что для энергий, близких к энергии сфалерона, численный и аналитический результаты различаются довольно сильно, но экстраполяция численных данных в нулевую энергию совпадает

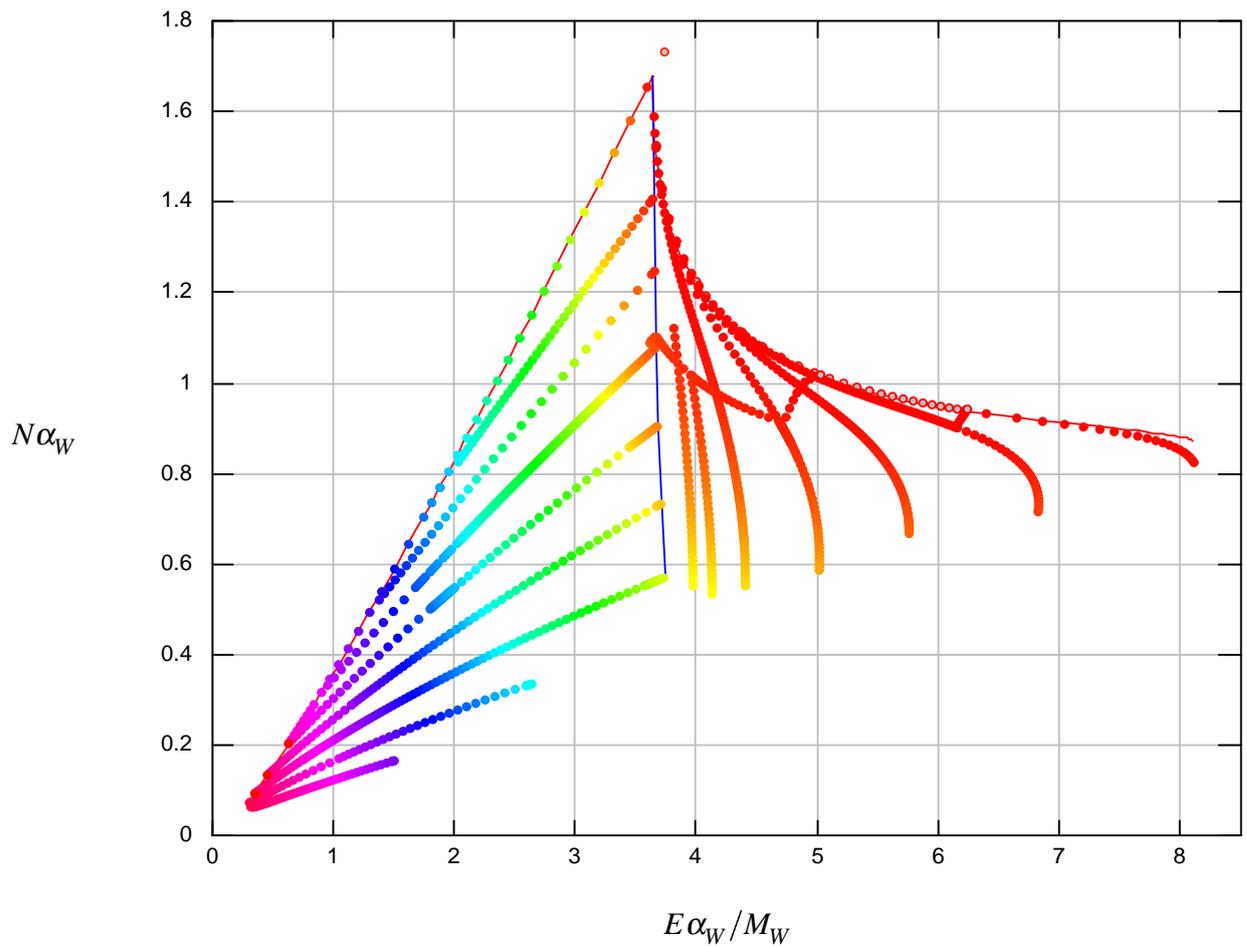


Рис. 2.2. Поиск решений. Каждая точка соответствует одному решению граничной задачи. Цвет точек отображает показатель экспоненты подавления  $F(E, N)$ . Почти вертикальная линия соответствует энергии бифуркации  $E_1(N)$ , (сравни с рис. 1.3).

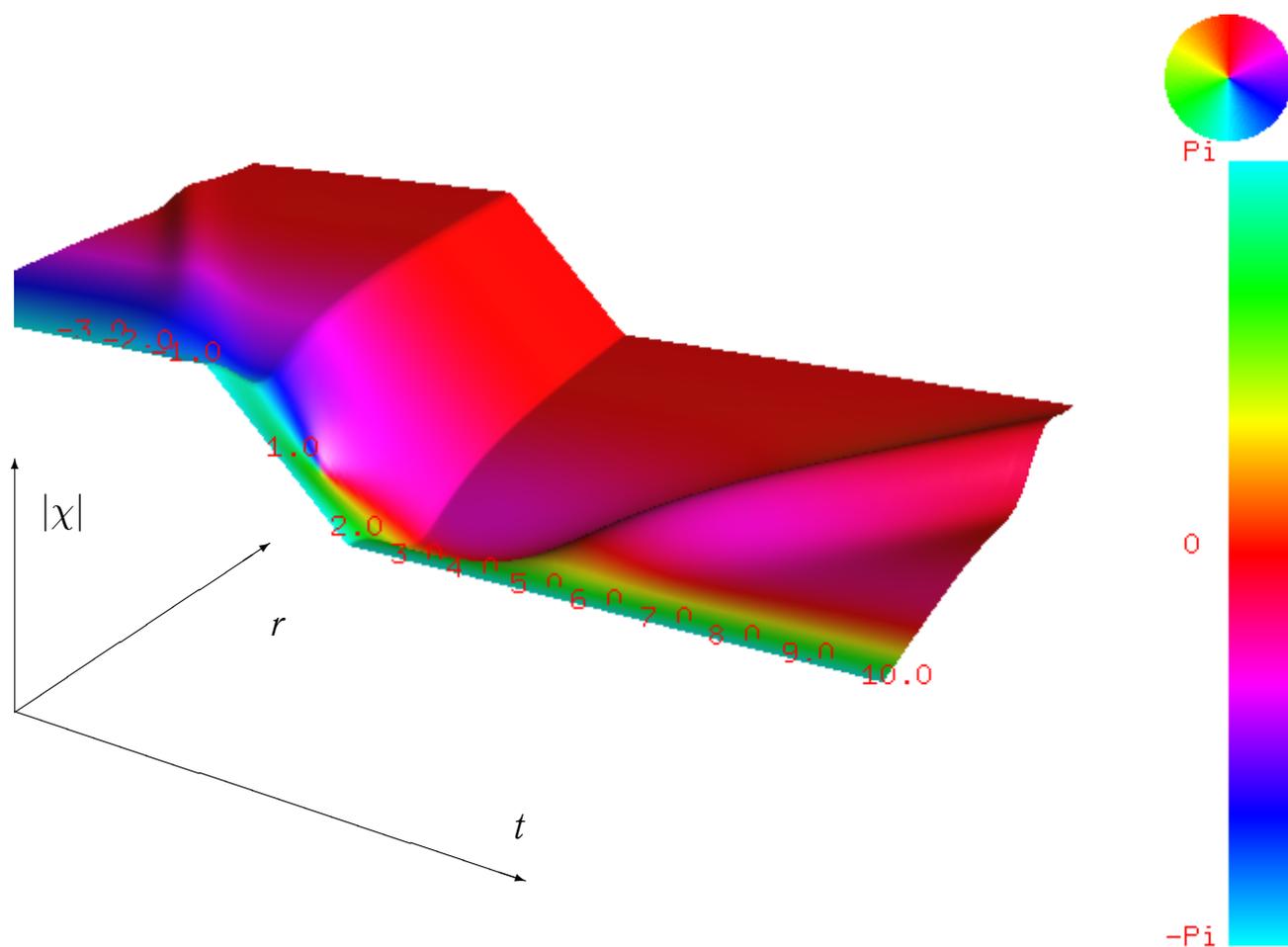


Рис. 2.3. Поведение поля  $\chi$  для решения с  $N = 1/\alpha_W$  и  $E = 3.35M_W/\alpha_W$ . Цвет отображает фазу поля. Часть решения, соответствующая Евклидовой части контура, наклонена для наглядности.

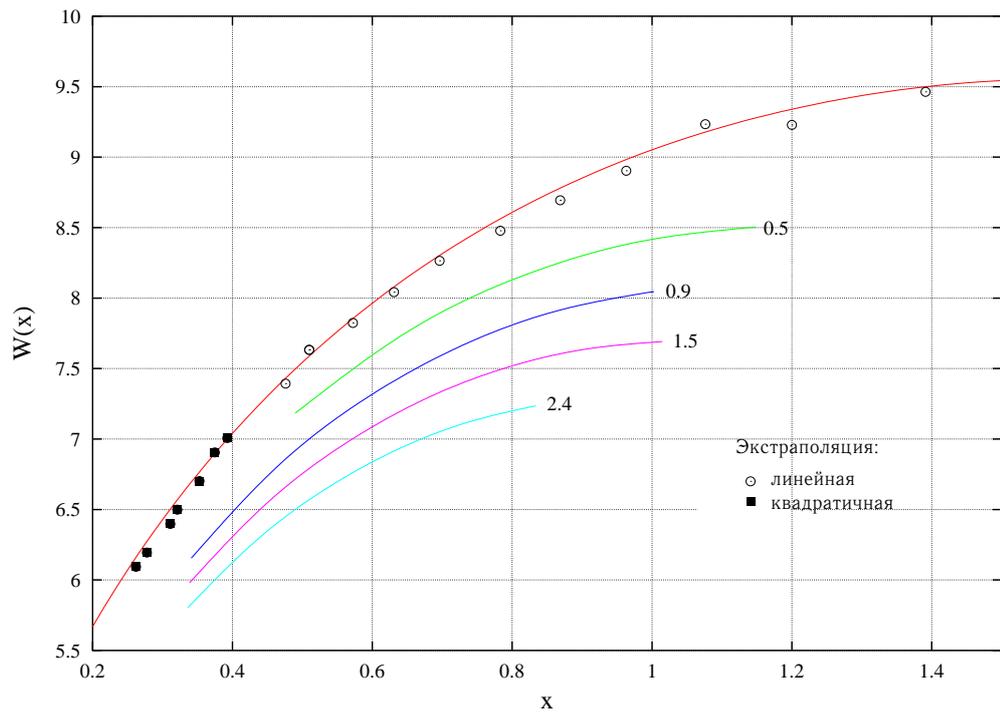


Рис. 2.4. Универсальная функция  $W(x)$  (верхняя кривая), пермасштабированные численные результаты (решения  $T - \theta$  граничной задачи)  $(1 - F)/f$  при различных энергиях (числа рядом с графиками дают значения безразмерной величины  $E\alpha_W/\sqrt{2}M_W$ ), и результат экстраполяции численных данных к нулевой энергии  $E$ . Величины  $f$  и  $x$  определяются уравнениями (1.40) и (1.41):  $f \propto E^{4/3}$ ,  $x \propto N/E^{4/3}$ .

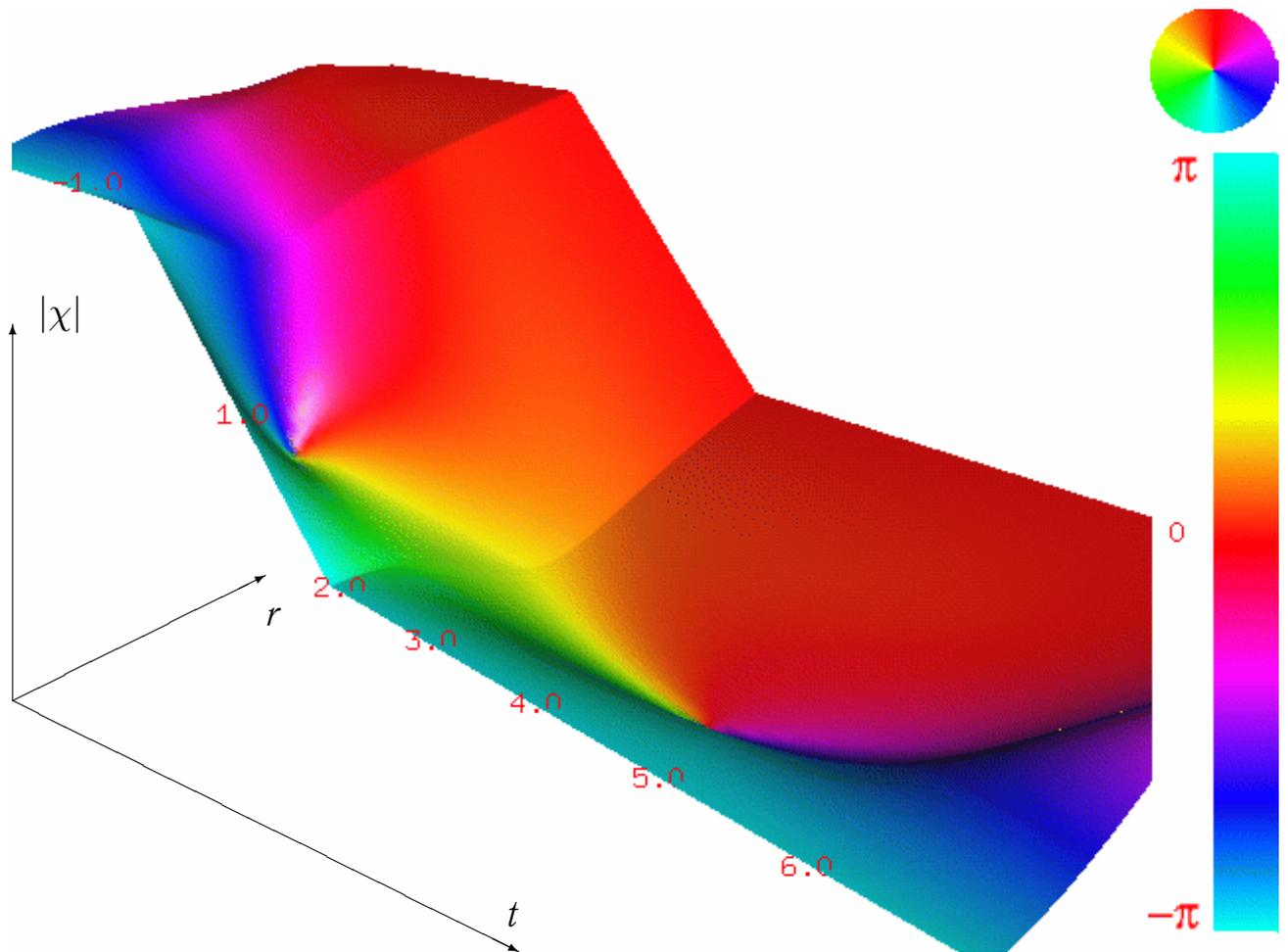


Рис. 2.5. Решение для  $T/2 = 2$  и  $\theta = 3.35$ , без регуляризации. Для этого решения  $E/E_{\text{sph}} = 1.04$ ,  $N\alpha_W = 0.94$ , так что  $E > E_1(N)$ . Видно, что топологические свойства решения неправильные — оно начинается и заканчивается в окрестности одного и того же вакуума.

с аналитическим предсказанием. Это совпадение является нетривиальной независимой проверкой правильности численных вычислений.

## 2.5 Переход через энергию сфалерона

Описанная процедура работает только для относительно небольших энергий  $E \lesssim E_{\text{sph}}$ . С ростом энергии решения стремятся оставаться все большее время около сфалерона на части CD контура. При приближении энергии

к величине  $E_1(N)$  это время стремится к бесконечности. Если продолжать поиск решений граничной задачи (1.20) с условием действительности, наложенном при конечном  $T_f$ , то при бóльших энергиях решения будут иметь неправильные топологические свойства, т.е. они будут заканчиваться в том же топологическом секторе, что и в начальный момент времени (см. рис. 2.5).

Линия  $E_1(N)$  — это линия бифуркации, на которой встречаются два типа решений граничной задачи (1.20). Это (i) решения, которые заканчиваются вблизи того же вакуума, что и исходный, и (ii) решения, которые заканчиваются на сфалероне с возбужденными положительными модами (которые, в случае теории поля, быстро улетают на бесконечность в виде сферических волн на фоне поля сфалерона). Первый тип решений нефизический, а экспонента туннелирования определяется именно вторым типом. Для решений типа (ii) условие действительности (1.20с) выполняется только асимптотически, и, соответственно, наложить его численно очень сложно.

Оказывается возможным регуляризовать граничную задачу. Для этого модифицируем выражение для сечения туннелирования следующим образом:

$$\sigma_\epsilon(E, N) = \sum_{i, f} |\langle f | e^{-2\epsilon \hat{T}_{\text{int}}} \hat{S} \hat{P}_E \hat{P}_N | i \rangle|^2, \quad (2.24)$$

где  $\epsilon$  — малый параметр, а  $T_{\text{int}}$  — функционал на решении, характеризующий время, которое система проводит в области взаимодействия (около сфалерона). Это хорошо определенная величина, стремящаяся в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  к исходному сечению  $\sigma(E, N)$ . Для решений, которые проводят конечное время в области взаимодействия, добавочный член пропорционален

$\epsilon$ , который будем считать наименьшим параметром в задаче, и не дает существенного вклада в ответ. Однако для решений, заканчивающихся на сфалероне, этот член обращается в бесконечность. Таким образом, решения типа сфалерона не являются седловыми решениями, дающими квазиклассическое приближение для вычисления функционала (2.24).

Более того, если рассматривать непрерывное семейство седловых решений для регуляризованного функционала (2.24), все решения будут интерполировать между одной и той же парой вакуумов. Действительно, все решения регуляризованного функционала заканчиваются вблизи вакуумов, характеризуемых дискретным топологическим числом, которое не может измениться при непрерывном изменении параметров решения.

Функционал (2.25) может быть выбран в виде

$$T_{\text{int}} = \int dt dr f(r)g[\varphi(r)]$$

где  $f$  и  $g$  некоторые функции, а  $\varphi$ , как всегда, обозначает поля модели. Он должен обладать следующими свойствами: i) принимать большие положительные значения на конфигурациях, близких к сфалерону (точнее, там, где поля далеки от своих вакуумных значений); ii) не изменять свободную динамику в линейном режиме, или, другими словами, не добавлять квадратичных членов в разложение действия вокруг вакуума (это важно, чтобы не испортить граничные условия); iii) быть калибровочно инвариантным. В остальном выбор функционала произволен, и определяется спецификой задачи и удобством вычисления. Заметим, что возможность изменять функцию  $f(r)$  не принципиальна для рассматриваемой здесь модели, но может оказаться полезна в других случаях, например, в задаче о распаде ложного вакуума, где конечное состояние имеет вид пузыря в ложном вакууме, и

не может быть близко к вакуумному во всем пространстве.

В случае калибровочной теории с механизмом Хиггса мы использовали функционал

$$T_{\text{int}} = \int dt \int dr (\bar{\phi}(r)\phi(r) - 1)^8 . \quad (2.25)$$

Граничная задача, получающаяся из (2.24), совпадает с нерегуляризованной, но с действием, к которому добавлен мнимый член

$$\delta S = i\epsilon \int dt \int dr (\bar{\phi}(r)\phi(r) - 1)^8 . \quad (2.26)$$

Уравнения движения (2.4) также изменяются соответствующим образом.

Заметим, что время взаимодействия  $T_{\text{int}}$  сопряжено к  $\epsilon$  относительно преобразования Лежандра,

$$T_{\text{int}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} F_{\epsilon}(E, N) , \quad (2.27)$$

здесь и далее индекс  $\epsilon$  обозначает, что величина (в данном случае экспонента подавления) вычисляется для регуляризованного сечения (2.24).

Можно также получить следующие полезные соотношения для энергии и числа частиц:

$$E = E|_{\epsilon=0} + 2\epsilon \frac{\partial T_{\text{int}}}{\partial T} + O(\epsilon) , \quad (2.28)$$

$$N = N|_{\epsilon=0} + 2\epsilon \frac{\partial T_{\text{int}}}{\partial \theta} + O(\epsilon) . \quad (2.29)$$

Из этих уравнений видно, как меняются  $E$  и  $N$  в зависимости от  $\epsilon$  — вдали от линии бифуркации нерегуляризованной задачи  $E_1(N)$  значения  $E$  и  $N$  слабо зависят от  $\epsilon$ , а при  $E \sim E_1(N)$  где  $T_{\text{int}}$  принимает (для малых  $\epsilon$ ) большие значения, зависимость сильная, что приводит к значительному сдвигу точки  $(E, N)$ .

С помощью этой регуляризации можно получить экспоненту подавления для всех энергий  $E$ . Для этого при энергии меньшей, чем  $E_1(N)$ , вводится небольшое ненулевое  $\epsilon$  (в реальных вычислениях использовалась величина  $\epsilon \sim 10^{-3}$ ). После этого получаются решения регуляризованной задачи во всей области энергий, автоматически имеющие правильные топологические свойства. Потом на полученных решениях берется предел  $\epsilon \rightarrow 0$ . При стремлении  $\epsilon$  к нулю, решения с  $E > E_1(N)$  остаются все большее время около сфалерона, что означает, что в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  решения туннелируют «на» сфалерон. Причем оказывается, что величины  $E$ ,  $N$ ,  $F$  при  $\epsilon = 10^{-3}$  отличаются от предельного значения при  $\epsilon \rightarrow 0$  меньше, чем на процент, практически для всех значений  $E$ ,  $N$ , кроме малой области около линии бифуркации  $E_1(N)$ . Таким образом, с хорошей точностью на практике можно ограничиться вычислениями с  $\epsilon \sim 10^{-3}$ , и не брать собственно предела  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Более того, на границе классически разрешенной области решения регуляризованной задачи гладко переходят в классические надбарьерные решения. Действительно, вспомним, что классические надбарьерные решения удовлетворяют  $T/\theta$  граничной задаче с нулевыми  $T$  и  $\theta$ . Причем на границе классически разрешенной области  $E = E_0(N)$  решения граничной задачи испытывают бифуркацию, схожую с бифуркацией при  $E_1(N)$ , т.е. на ней обращается в бесконечность время нахождения решения в области взаимодействия (рядом со сфалероном). Однако в регуляризованной задаче решения такого вида не присутствуют, и эта бифуркация обходится, как и бифуркация при  $E_1(N)$ . На границе классически разрешенной области  $F = 0$  по определению. Это позволяет заключить, что в классически разрешенной области регуляризованный показатель экспоненты подавления

мал, порядка  $\epsilon$ :  $F_\epsilon(E, N) = \epsilon f(E, N) + O(\epsilon^2)$ . Из преобразования Лежандра (2.33), (2.34) следует, что значения  $T$  и  $\theta$  тоже должны быть порядка  $\epsilon$ :  $T = \epsilon\tau(E, N)$ ,  $\theta = \epsilon\vartheta(E, N)$ , где величины  $\tau$  и  $\vartheta$  связаны с начальной энергией и числом частиц (см. выражения (1.13), (1.14)) следующим образом,

$$E = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial T} 2 \operatorname{Im} S_\epsilon = \frac{\partial}{\partial \tau} 2T_{\text{int}}(\tau, \vartheta), \quad (2.30)$$

$$N = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \theta} 2 \operatorname{Im} S_\epsilon = \frac{\partial}{\partial \vartheta} 2T_{\text{int}}(\tau, \vartheta). \quad (2.31)$$

Таким образом, можно надеяться, что решения в классически доступной области получаются в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  с фиксированными  $\tau \equiv T/\epsilon = \text{const}$  и  $\vartheta \equiv \theta/\epsilon = \text{const}$ . В классически доступной области параметры  $\tau$  и  $\vartheta$  играют роль, аналогичную  $T$  и  $\theta$  в классически запрещенной области.

В рассматриваемой калибровочной теории поля есть еще одна проблема, важная для реализации описанной процедуры. При энергиях  $E < E_1(N)$  время  $T$ , проведенное на Евклидовой части контура, растет с энергией (в отличие, например, от двумерной квантовой механики [61]), а на границе классически разрешенной области  $E_0(N)$  оно обращается в ноль. Это означает, что  $T$ , рассматриваемое как функция энергии при фиксированном  $\theta$  (или  $N$ ), имеет максимум между  $E_1(N)$  и  $E_0(N)$  (вычисления показывают, что максимум наблюдается при  $E = E_1(N)$ , см. рис. 2.7). Для  $T$ , близких к максимальному значению, метод Ньютона–Рафсона перестает сходиться, из-за наличия двух близких решений с одинаковыми значениями  $T$ . Эта новая «бифуркация» пропадает, если искать решения при *фиксированной энергии*  $E$ , вместо фиксированного  $T$ . Чтобы сформулировать граничную задачу с фиксированным  $E$ , вместо  $T$ , необходимо сделать высоту контура  $T'$  некоторой (постоянной) произвольной величиной (ответ от нее зависеть не должен), и не полагать ее равной  $T$ . Это приводит к небольшому

видоизменению  $\theta$ -граничных условий (см. (1.16))

$$\dot{f}_k = e^{-\theta - \omega_k(T-T')} g_k. \quad (2.32)$$

Также требуется дополнительное уравнение, которое определит величину свободной переменной  $T$ . Этим уравнением является уравнение, определяющее энергию решения (1.21). После этой модификации, «бифуркация», отвечающая максимуму  $T$ , пропадает. Заметим, однако, что следует применять этот метод с осторожностью — так как на решетках реалистичных на данный момент размеров достичь полностью линейного режима в начальном состоянии невозможно, то разница между  $T$  и  $T'$  должна быть достаточно малой, так как зависимость полей от сдвига в мнимом направлении во времени экспоненциальна. В описываемых вычислениях граничная задача с фиксированным  $E$  ( $T'$  отличается от  $T$ ) использовалась только для перехода через максимум  $T$ .

В наших вычислениях небольшое ненулевое  $\epsilon$  вводилось, когда энергия решений приближалась к  $E_1(N)$ . Одновременно, модификация (2.32) использовалась, чтобы пересечь максимум  $T$  при  $E_1(N)$  ( $\theta$  при этом держалось постоянным). На рис. 2.2 решения, полученные таким образом, отвечают точкам на линии, пересекающей линию бифуркаций  $E_1(N)$ . При более высоких энергиях модификация (2.32) более не требуется, и использовалась только регуляризация с помощью ненулевого  $\epsilon$ . На рис. 2.2 решения регуляризованной задачи в области А.П соответствуют точкам на кривых линиях в правой части графика (линии постоянного  $T$ ). Линия с наибольшей энергией имеет нулевой показатель экспоненты подавления, и соответствует границе классически разрешенной области. Чтобы получить линии с разными значениями  $T$  в процессе вычисления были получены также ре-

шения, обозначенные на графике зигзагообразной линией в правой части рис. 2.2 (куски «зигзага», направленные поперек к границе классически разрешенной области, получались с помощью одновременного уменьшения  $T$ ,  $\theta$ ,  $\epsilon$  с постоянными  $\tau$  и  $\vartheta$ , так как для решения задачи в области малых  $F$  необходимо использовать меньшие значения регуляризующего параметра  $\epsilon$ ).

Заметим еще, что возможно несколько улучшить точность определения границы классически разрешенной области, воспользовавшись соотношением

$$\frac{4\pi}{\alpha_W} dF = -\theta dN - T dE .$$

Если известна некая точка вблизи границы с ненулевым  $F$  и некоторыми  $N$  и  $E$ , то можно получить точку на границе с

$$\begin{aligned} N_0 &= N + \frac{4\pi F}{\alpha_W \theta} \\ E_0 &= E + \frac{4\pi F}{\alpha_W T} . \end{aligned}$$

Это использовалось для получения линии  $E_0(N)$  из полученных с помощью решения граничной задачи точек с минимальными значениями  $F$ .

## 2.6 Численные результаты

Выбор размера и формы решетки определяется несколькими факторами. Физический пространственный размер решетки  $L$  должен был достаточно большим, чтобы не искажать форму сфалерона. Кроме этого,  $L$  определяет, насколько близко к линейному режиму находится в начальном состоянии система: амплитуда сферических волн, определяющая нелинейность, спадает с удалением от начала координат. После выбора  $L$  длины частей АВ и

CD контура полностью определены: длина участка АВ контура  $T_{AB}$  должна быть несколько меньше  $L$ , чтобы входящая волна не достигала в начальный момент времени пространственной границы  $r = L$ . Длина участка CD контура  $T_{CD}$  может быть равной нулю для энергий, меньших энергии бифуркации,  $E < E_1(N)$ . Для больших же энергий  $T_{CD}$  подбирается достаточно длинным, чтобы решение успело распасться на возбуждения вокруг вакуума в конечном состоянии, и регуляризация (2.26) не давала значительного вклада в уравнения движения в конечный момент времени, когда накладываются условия действительности.

Пространственный шаг решетки  $\Delta r$  ограничивает точность по двум причинам. Во первых, он должен быть существенно меньше, чем размер инстантонообразной части конфигурации, т.е. характерный размер, в котором происходит нелинейная эволюция вблизи  $r = 0$  во время собственно топологического перехода. Во вторых,  $\Delta r$  определяет энергию самой жесткой моды в начальном состоянии, ограничивая, таким образом, наименьшее значение числа частиц  $N$ , достижимое при заданной энергии  $E$ . Временной шаг решетки  $\Delta t$  выбирается меньшим, чем  $\Delta r$ , чтобы гарантировать стабильность численной процедуры.

Объем компьютерной памяти, необходимый для вычислений на решетке пространственного размера  $N_r$  и временной длины  $N_t$  равен приблизительно  $2 \times N_t(5N_r)^2 \times 16$  байт (см. приложение А: основные требования налагаются массивами  $D^{(+)}$  и  $D^{(-)}$ , оценка предполагает длину представления комплексного числа с двойной точностью 16 байт), а процессорное время одной итерации Ньютона–Рафсона зависит от  $N_t$  и  $N_r$  как  $N_t(5N_r)^3$ . В приложении А описано, что алгоритм возможно выполнять параллельным образом, и, следовательно, это время надо, вообще говоря, поделить на

число процессоров, участвующих в вычислении<sup>3</sup>. В целом, основные ограничения накладываются на  $N_r$  — увеличение пространственного размера решетки в два раза влечет за собой увеличение требуемого времени по крайней мере в восемь раз.

Основные результаты были получены на решетке пространственного размера  $L = 8$  (т.е.  $L = 8/\sqrt{2}M_W$  в физических единицах) и количестве пространственных узлов решетки  $N_r = 90$ . Длина начальной минковской части контура  $T_{AB}$  равнялась 6. Количество временных точек  $N_t$  было равно 200 на участке АВ контура, и 150 на евклидовой части ВС. Количество точек на части CD было равно 2 для энергий  $E < E_1(N)$ , и варьировалось, достигая 400, для энергий, больших энергии бифуркации (там, где использовалась  $\epsilon$ -регуляризация). На решетках максимального размера объем используемой памяти достигал 4 Гб, а одна итерация Ньютона–Рафсона занимала около 3 минут на 16 процессорах суперкомпьютера IBM-RS/6000, или около 15 минут для полного нахождения одной конфигурации поля.

Результаты были получены в области значений  $E$  и  $N$ , изображенной на рис. 2.2. Для приведенных параметров решетки эта область ограничивается в первую очередь эффектами нелинейности в начальном состоянии, которые препятствуют достижению меньших чисел частиц  $N$ . В случае, когда малы одновременно энергия и число частиц (левая нижняя часть графика), также важны эффекты пространственной дискретизации (конечный  $\Delta r$ ).

Для проверки значимости эффектов дискретизации часть вычислений была проделана также на решетках меньших размеров. Приведенные результаты совпадают с результатами, которые получаются на решетке с  $N_r = 64$  с точностью, лучшей 1% (за исключением области очень малень-

<sup>3</sup>Алгоритм параллелизуется эффективным образом только в том случае, если  $N_{\text{processors}} < \sqrt{N_t}$ , следовательно наименьшее физическое время пропорционально  $\sqrt{N_t}(5N_r)^3$

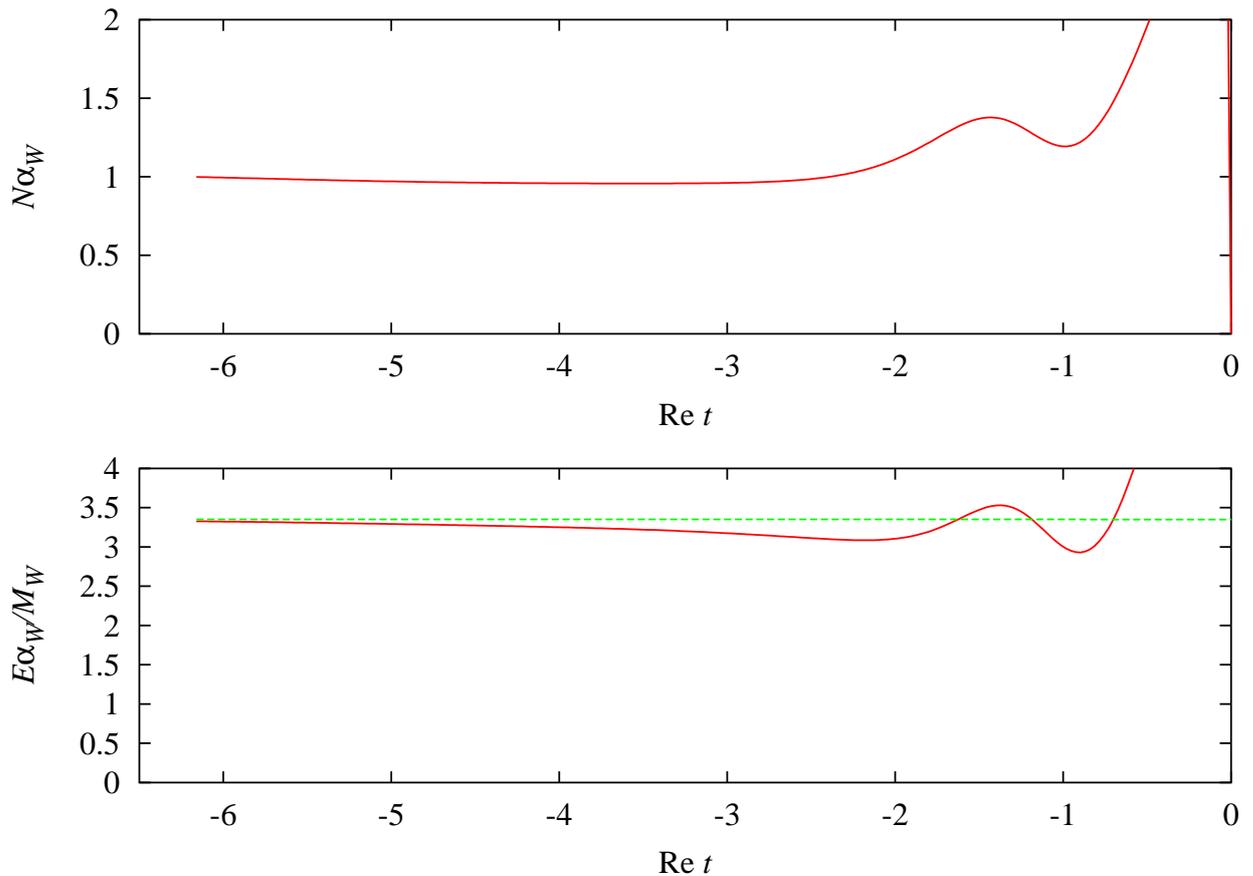


Рис. 2.6. Зависимость от времени числа частиц (верхний график) и линейной энергии (нижний график) для конфигурации с  $N = 1/\alpha_W$  и  $E = 3.35M_W/\alpha_W$ . Полная (нелинейная) энергия изображена пунктирной линией.

ких энергий). При сравнении же с вычислениями на решетке с  $N_r = 45$  совпадение наблюдается только для достаточно больших значений начальных чисел частиц, что и ожидалось.

Степень линеаризации системы в начальном состоянии можно проверить, анализируя зависимость от времени линейной энергии (1.21) и числа частиц (1.22) на участке АВ контура. Для полностью линеаризованной системы они не должны зависеть от времени. Этот тест для характерной конфигурации приведен на рис. 2.6. Линейная энергия совпадает с точной

в начальном состоянии с точностью порядка 1%, и даже лучше, что подтверждает то, что система достаточно близка к линейному режиму. Другой тест степени линеаризации дается нарушением граничного условия (2.21), которое было опущено для фиксации инвариантности относительно временных трансляций (см. раздел 2.2). Это нарушение увеличивается при уменьшении  $N$ , и, судя по всему, является одним из эффектов, предотвращающих достижения меньших  $N$  с использовавшимся размером решетки  $L = 8$ . Для достижения лучшей степени линеаризации в начальном состоянии, и, соответственно, достижения меньших чисел частиц  $N$ , необходимо добиться увеличения размера решетки.

Возможны также другие проверки самосогласованности вычислений, как то проверка сохранения энергии на решении и проверка выполнения обратного преобразования Лежандра

$$\theta = -(4\pi) \left. \frac{\partial F}{\partial N} \right|_E \quad (2.33)$$

$$T = -(4\pi) \left. \frac{\partial F}{\partial E} \right|_N . \quad (2.34)$$

Эти тесты выполняются с точностью лучшей, чем  $10^{-3}$ . Это означает, что точность результатов определяется в первую очередь степенью линеаризации начального состояния (около 1%).

Линии постоянного  $T$  и постоянного  $\theta$  приведены на рисунках 2.7 и 2.8. Из рисунка 2.8 видно, что  $\theta$  растет с уменьшением  $N$ , как и ожидается, а также что  $\theta$  равно нулю на линии периодических инстантонов и границе классически разрешенной области  $E_0(N)$ . Линии постоянного  $T$  показывают, что на границе  $E_0(N)$  параметр  $T$  также обращается в ноль, а максимум при фиксированном  $N$  (и при фиксированном  $\theta$ ) достигается на линии бифуркаций  $E_1(N)$ . Напомним, что около этой линии для решения урав-

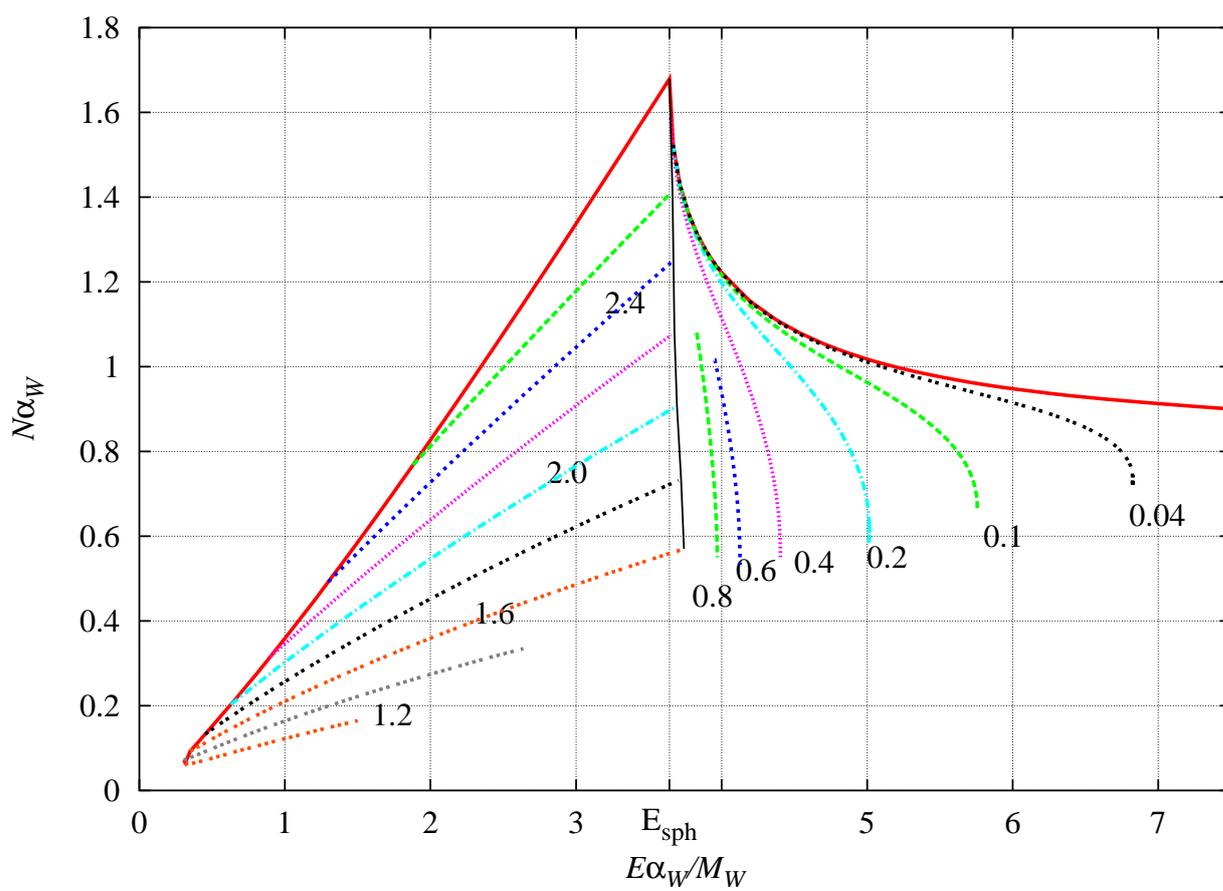


Рис. 2.7. Линии постоянного  $T$ .

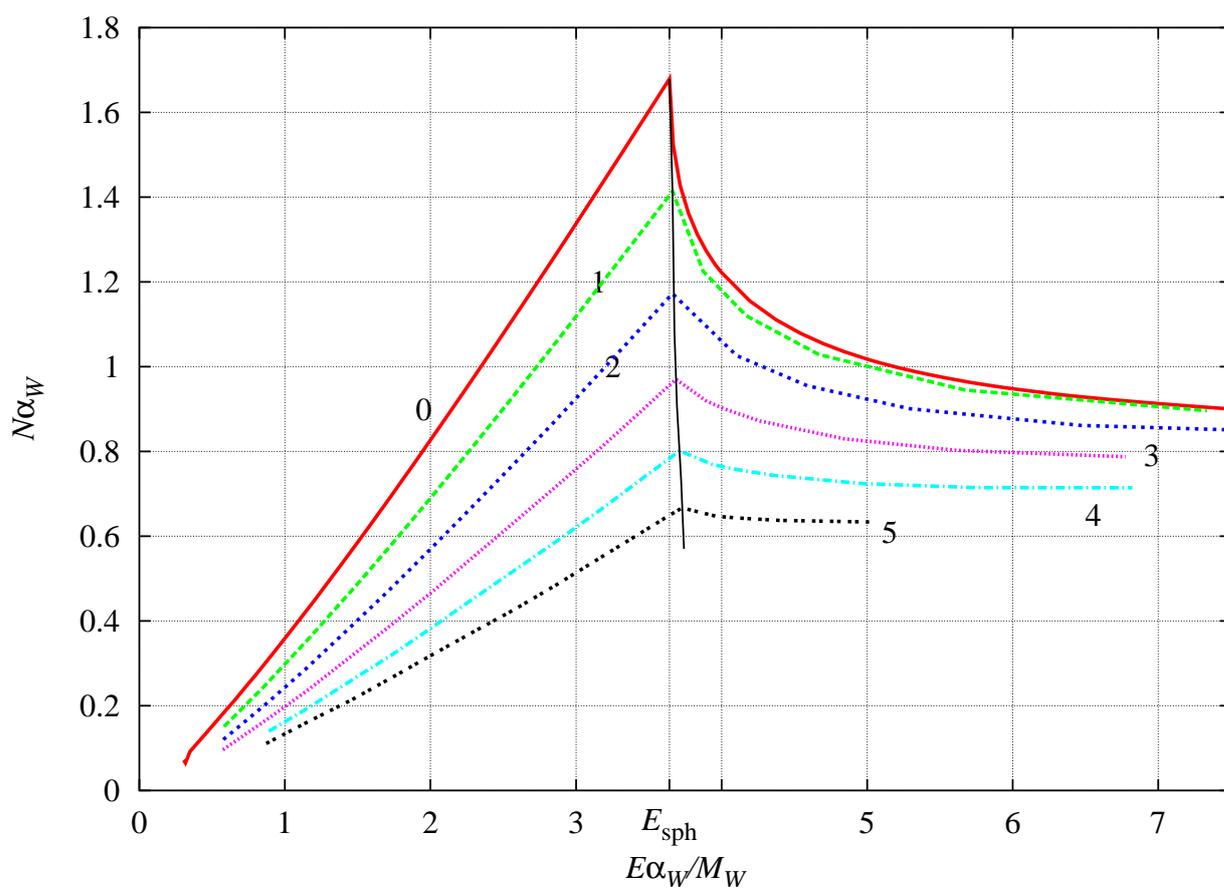


Рис. 2.8. Линии постоянного  $\theta$ .

нений использовалась модификация граничной задачи, описанная в конце раздела 2.5.

Характерные решения для поля  $\chi$  приведены на рис. 2.9. Они соответствуют глубоко туннельному режиму ( $E < E_1(N)$ ), туннелированию на сфалерон ( $E > E_1(N)$ ) и классическому надбарьерному процессу при  $E_0(N)$  (все для  $N = 1$ ). Из распределения цвета (фазы поля  $\chi$ ) на рисунках видно, что действительно происходит топологический переход, изображенный на 2.1. Входящая волна в левой части рисунков становится все более острой при увеличении энергии (а число частиц для всех трех рисунков одинаково). На первом рисунке топологический переход происходит на Евклидовой части контура. На втором и третьем рисунках в правой части видна сфалеронообразная конфигурация, с «лишними» расходящимися волнами (возбуждения над сфалероном), в то время как собственно сфалерон распадается значительно позже — в самой правой части картинке, причем при стремлении параметра регуляризации  $\epsilon$  к нулю, момент распада сфалерона сдвигается в сторону больших времен. При больших временах видна также волна, отраженная от границы  $r = L$ . Она появляется из-за условий Дирихле (2.9), наложенных при  $r = L$ . Эта волна не дает никакого вклада в ответ, так как находится там, где система уже достигла линейного режима (и, соответственно, поля и само действие действительны)<sup>4</sup>.

То, что при энергии большей энергии бифуркации,  $E > E_1(N)$ , решение после туннелирования имеет вид сфалерона со сферическими возбуждениями на его фоне, можно проиллюстрировать, нарисовав пространственное распределение плотности энергии в разные моменты времени после туннелирования, и сравнив его с распределением плотности энергии сфалерона.

<sup>4</sup>Чтобы избавиться от отраженной волны необходим значительно больший пространственный размер решетки.

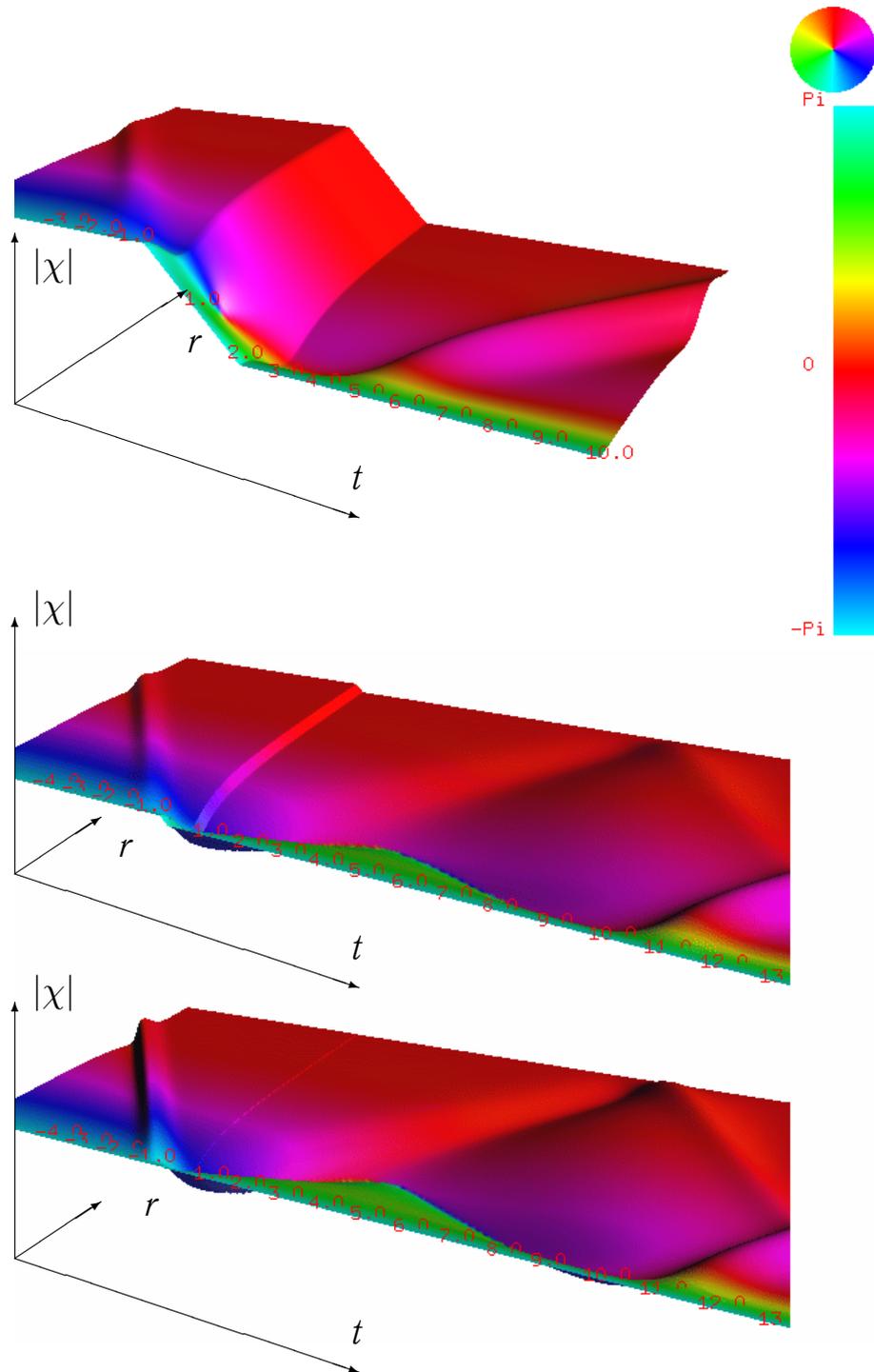


Рис. 2.9. Поведение поля  $\chi$  для решений с  $N = 1$  и  $E = 3.35$  (верхний рисунок),  $E = 4.48$  (средний),  $E = 5.22$  (нижний рисунок). Первая поверхность соответствует глубоко подбарьерному туннелированию, а последняя — почти классическому надбарьерному переходу.

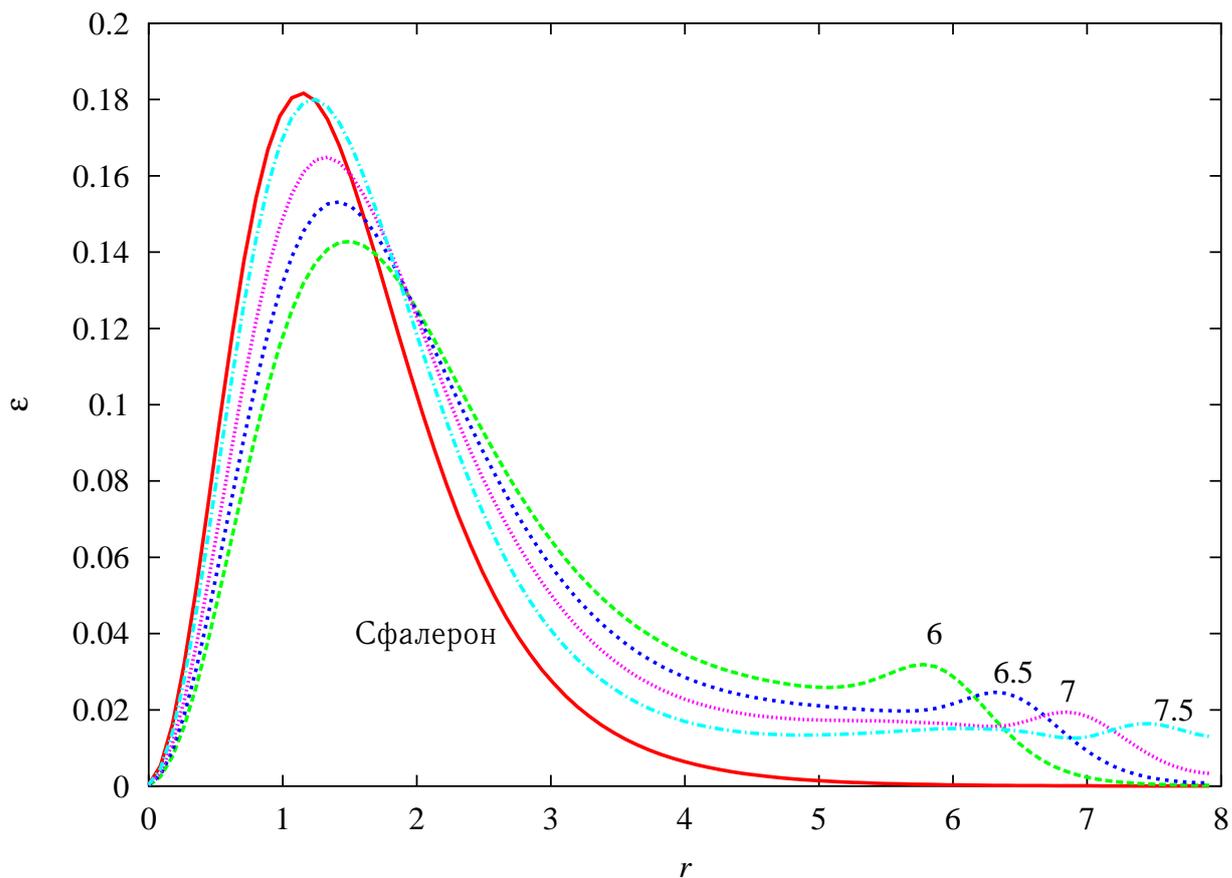


Рис. 2.10. Распределение плотности энергии для нескольких моментов времени  $\text{Re } t$  (обозначенных числами рядом с графиками) для средней конфигурации на рис. 2.9 ( $N = 1$ ,  $E = 3.35$ ). Для сравнения сплошной линией изображено распределение плотности энергии сфалерона.

На рис. 2.10 такой график приведен для среднего решения на рис. 2.9. При увеличении времени виден улетающий горб энергии, соответствующий сферической волне, а само распределение энергии при этом приближается к распределению энергии сфалерона.

Интересно также заметить, что при уменьшении начального числа частиц  $N$ , заселенными оказываются моды с большими энергиями. Это продемонстрировано на рис. 2.11 для энергии, немного меньшей энергии сфалерона.

Наши численные результаты для показателя экспоненты подавления во всей классически запрещенной области приведены на рисунках. 2.12, 2.13. Почти вертикальная линия на рис. 2.12 — эта линия бифуркации, разделяющая области А.І и А.ІІ, где туннелирование происходит качественно различным образом. Она, одновременно, является границей, за которой непосредственное применение метода, описанного в работах [50–53], перестает быть возможным. Из рис. 2.12 видно, что регуляризация позволяет получить результаты при значительно больших энергиях, вплоть до границы классически разрешенной области.

Интересным является сравнение с результатами работы [60], в которой техника Монте-Карло применялась для поиска классических надбарьерных решений<sup>5</sup> с минимально возможным числом частиц  $N$  при данной энергии  $E$ . Это дает приближенную границу (и одновременно строгое ограничение сверху на нее) классически разрешенной области. Видно, что результаты работы [60] достаточно близки к границе  $E_0(N)$ , найденной в наших

---

<sup>5</sup>В работе [60] использовалась константа самодействия хиггсовского поля  $\lambda = 0.1$ , в отличие от использованной нами  $\lambda = 0.125$ . Для проверки, нами был произведен ряд вычислений с  $\lambda = 0.1$ . Зависимость от значения  $\lambda$  (по крайней мере, в указанных пределах) мала, и просто не заметна на графике. Видимое на рис. 2.13 расхождение отвечает различным параметрам решетки. В методе работы [60] необходимо решать только начальную задачу для уравнений движения, что позволяет использовать значительно большие пространственные размеры решетки с меньшим решеточным шагом.

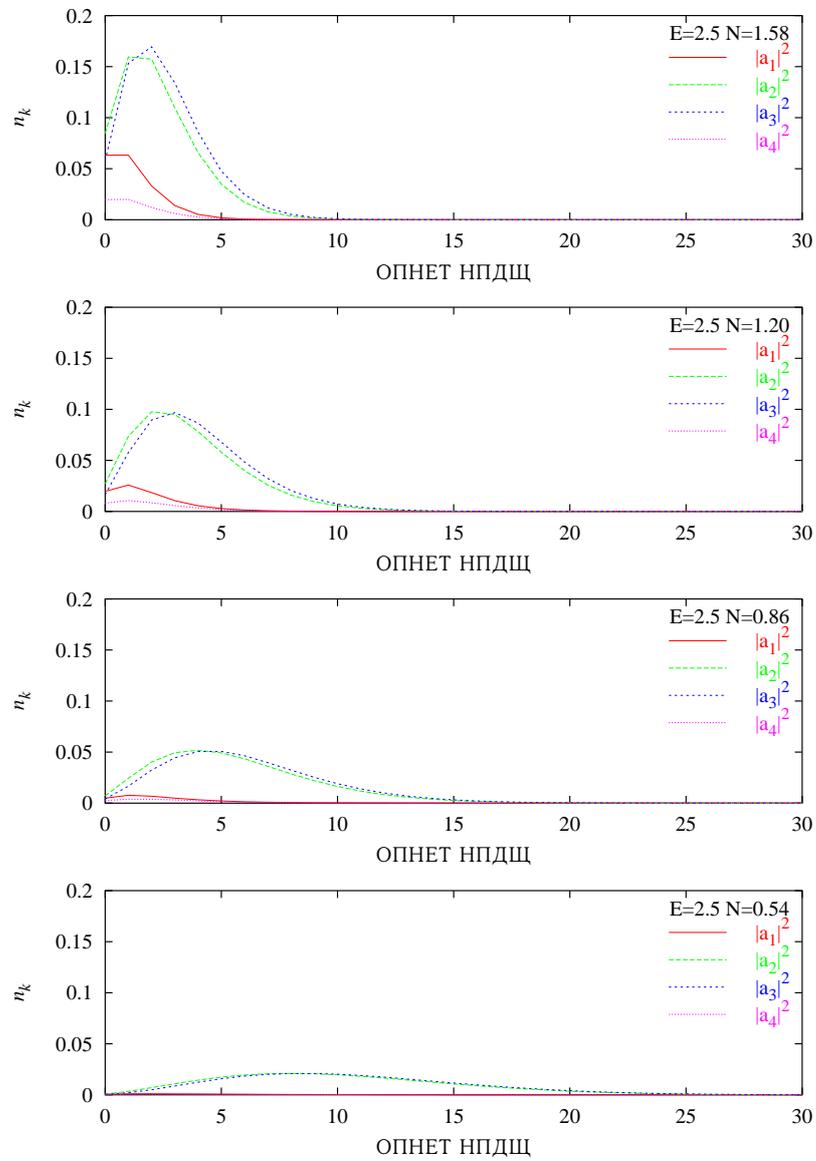


Рис. 2.11. Распределение числа частиц  $n_k$  по модам в начальном состоянии для решения с энергией  $E\alpha_W/M_W = 3.54$  и различными  $N$ .  $a_i$  — числа частиц в моде типа в единицах  $1/\alpha_W$  для мод четырех разных типов (определения см. в [60]). Мода  $a_1$  соответствует бозону Хиггса, а моды  $a_{2,3,4}$  — калибровочному бозону ( $a_{2,3}$  поперечные,  $a_4$  — радиальная). По горизонтальной оси отложен номер моды для решетки с пространственным размером  $r = 8$ .

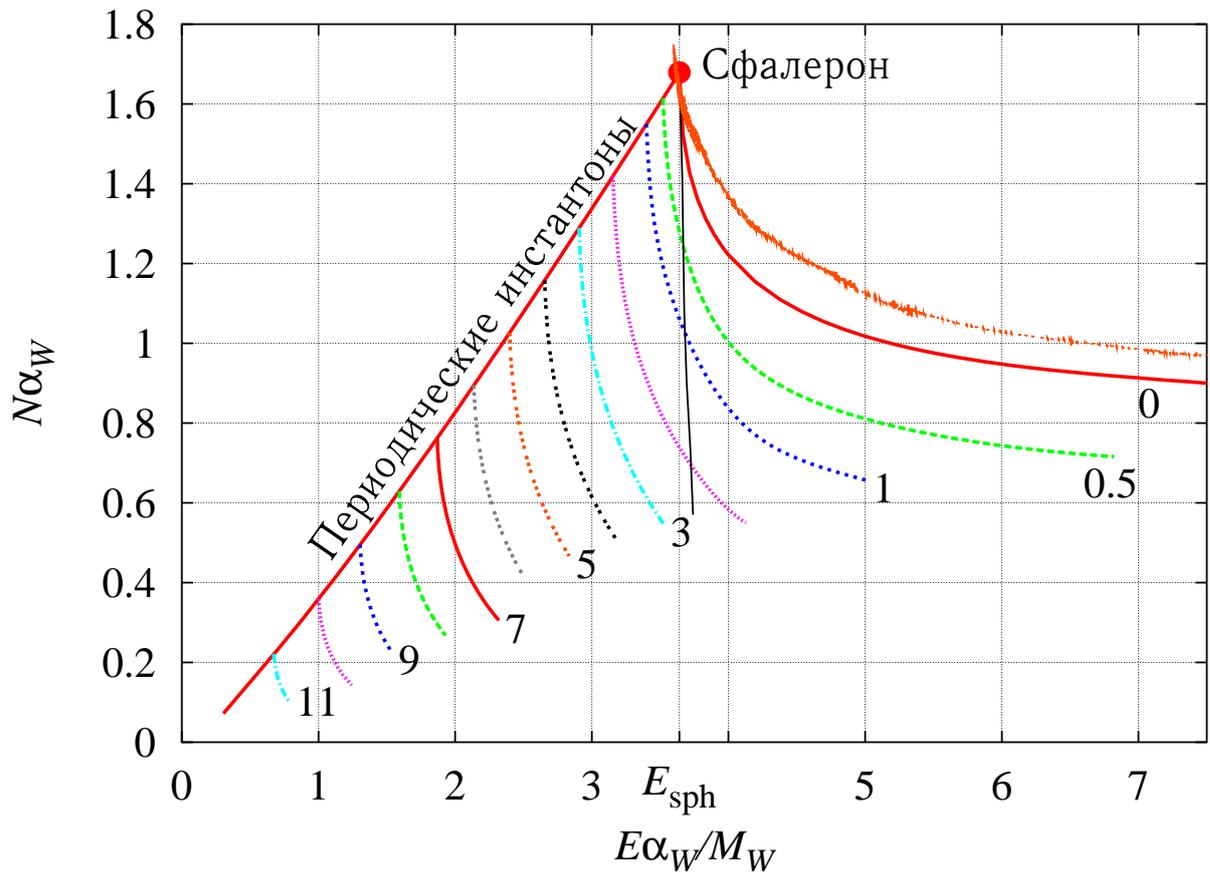


Рис. 2.12. Линии  $F(E, N) = \text{const}$ . На рисунке нанесены значения показателя экспоненты подавления  $-\alpha_W \log \sigma = 4\pi F$ . Диагональная линия, направленная из сфалерона в сторону начала координат — линия периодических инстантонов. Энергия  $E$  указана в единицах  $M_W/\alpha_W$ , число частиц  $N$  — в единицах  $1/\alpha_W$ . Линия с подавлением 0 ( $F = 0$ ) является границей классически разрешенной области  $E = E_0(N)$ . «Размытая» линия является приближенной границей классически разрешенной области, найденной с помощью надбарьерных вычислений в работе [60].

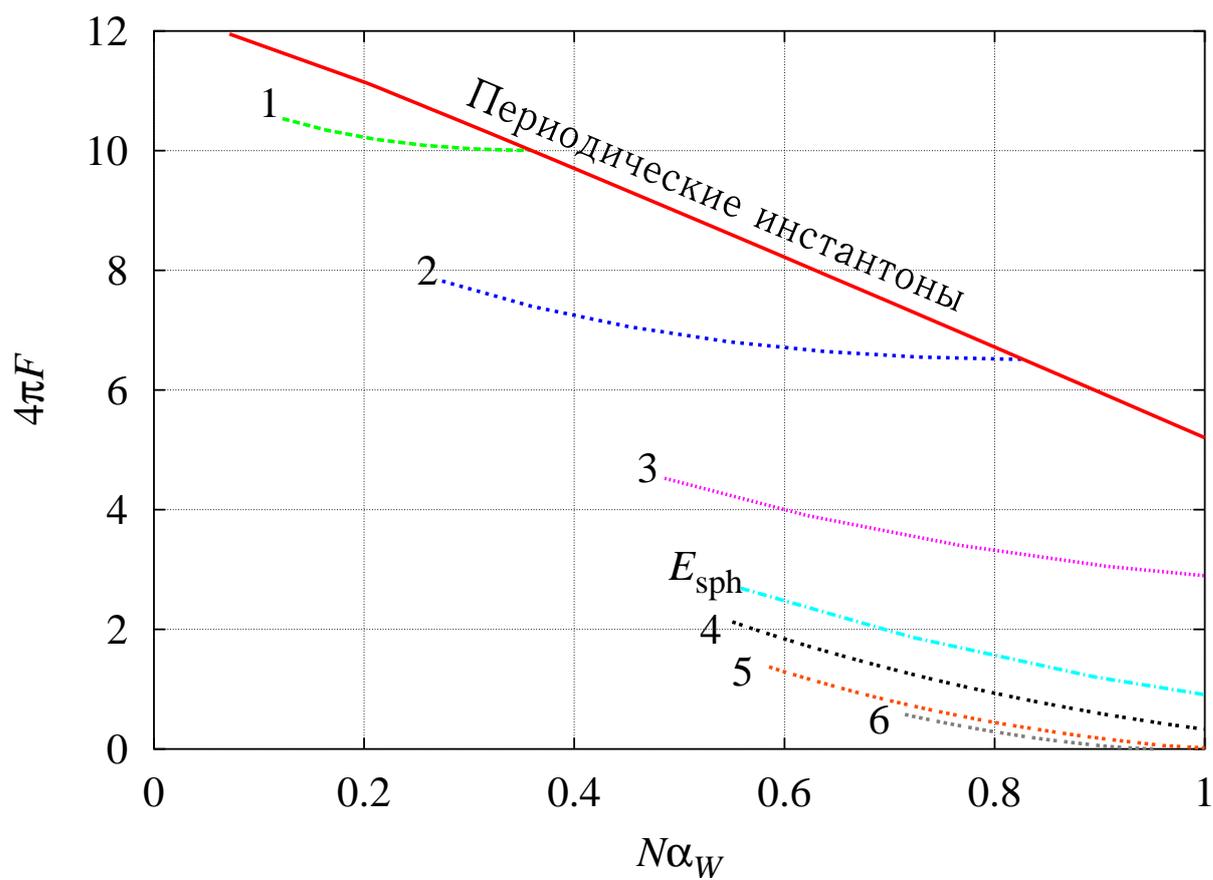


Рис. 2.13. Зависимость показателя экспоненты подавления от числа частиц  $N$  для различных энергий. Числа около графиков — значения энергии в единицах  $M_W/\alpha_W$ .

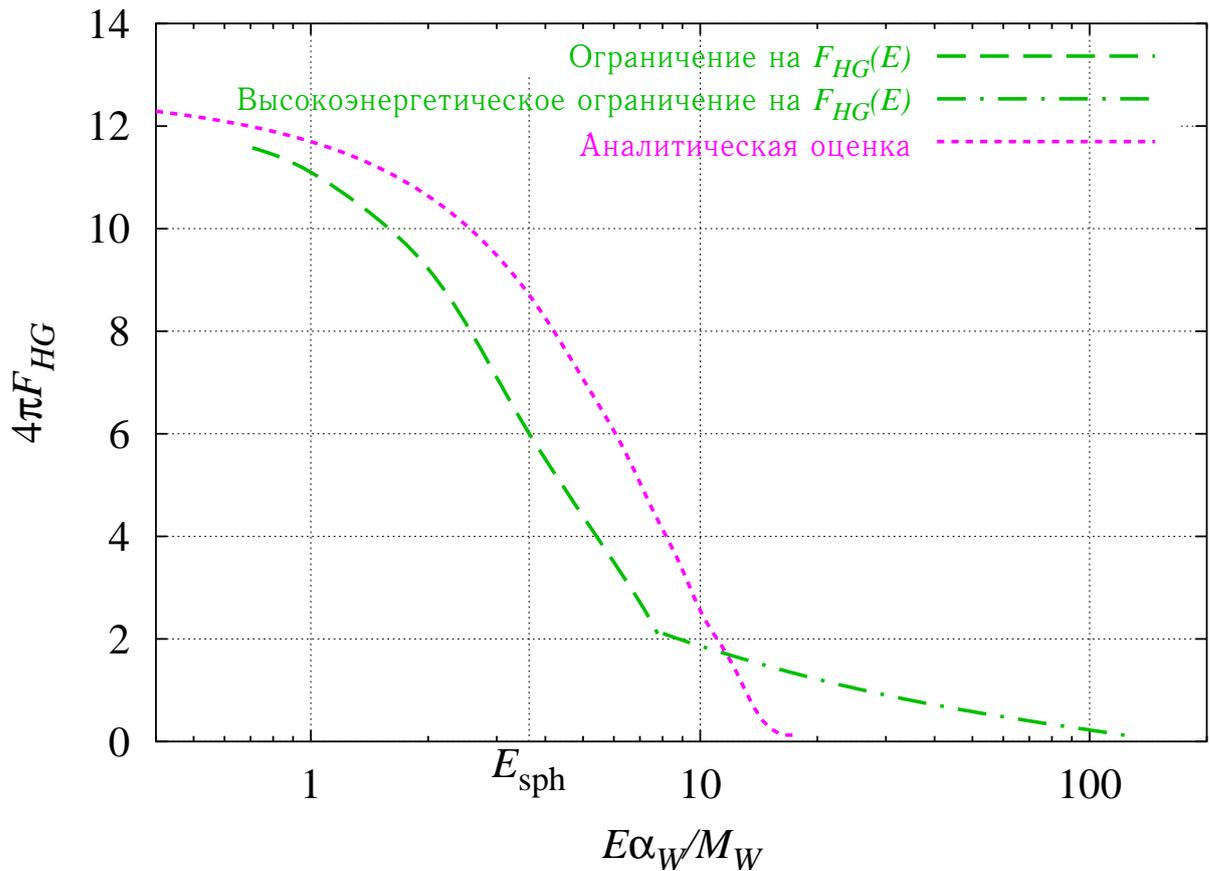


Рис. 2.14. Ограничение снизу на показатель экспоненты подавления топологических переходов в двухчастичных столкновениях, штриховая и штрих-пунктирная линия. Пунктирная линия — аналитическая оценка из работ. [87, 88].

вычислениях.

## 2.7 Ограничения на сечения двухчастичных столкновений

Результаты, приведенные на рис. 2.12 не достигают физически интересного значения  $N = 0$ , соответствующего столкновениям частиц. Численное исследование меньших  $N$  требует использования решеток большего размера, что требует значительных затрат процессорного времени, даже на современных суперкомпьютерах. Таким образом, для достижения физичи-

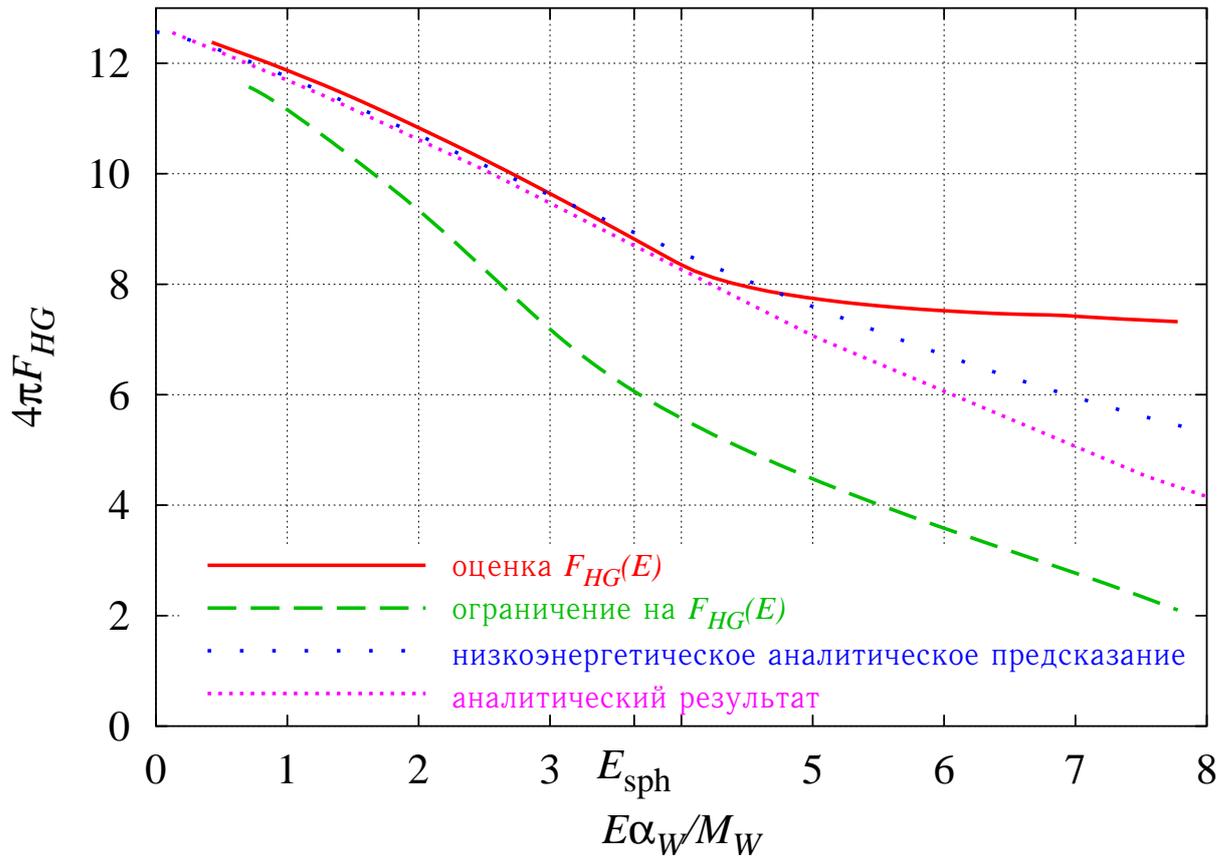


Рис. 2.15. Оценка показателя экспоненты подавления топологических переходов в двухчастичных столкновениях  $F_{HG}(E)$  (сплошная линия), ограничение снизу на  $F_{HG}(E)$  (штриховая линия), аналитическое предсказание при низких энергиях (2.35) (редкая пунктирная линия) и аналитическая оценка работ [87, 88] (пунктирная линия).

ески интересной области приходится применять экстраполяцию. Первой, самый простой, возможностью экстраполяции, является следующий метод получения ограничения снизу на показатель экспоненты подавления  $F$ . Поскольку  $\theta$  растет при  $N \rightarrow 0$ , а  $(4\pi)\partial F/\partial N = -\theta$ , то просто продолжив  $F$  в  $N = 0$  линейным образом по  $N$  для каждой энергии, получаем ограничение снизу на  $F$ . Это ограничение показано на рис. 2.14, 2.15, штриховой линией. Видно, что вплоть до энергии  $8M_W/\alpha_W \simeq 20$  ТэВ топологические переходы сильно подавлены: фактор подавления меньше, чем  $e^{-60} \sim 10^{-26}$  для значения слабой константы связи  $\alpha_W \sim 1/30$ .

Для очень больших энергий ограничение можно построить, используя тот факт, что линии постоянного  $F$  имеют положительную кривизну в плоскости  $E - N$  (см. рис. 2.12). Следовательно, линейная экстраполяция этих линий до  $N = 0$  также дает ограничение снизу на показатель экспоненты подавления  $F(E, N = 0)$ . Это ограничение изображено на рис. 2.14, штрих-пунктирной линией. Оно свидетельствует, что процессы с изменением топологического числа продолжают быть подавлены, по крайней мере, до энергии 250 ТэВ.

## 2.8 Оценка двухчастичных инстантонных сечений

Можно оценить и саму функцию  $F(E)$ . Хорошая оценка получается, если продолжать в  $N = 0$  не само  $F(E, N)$ , а функцию  $T(N)$  при фиксированной энергии. Функция  $F(E, N)$  сингулярна в пределе нулевых  $N$  (см. раздел 1.3), а  $T(N)$  приблизительно линейна по  $N$ . Более того, численные результаты показывают, что и при больших  $N$  это свойство функции  $T(N)$  сохраняется (см. рис. 2.16). При высоких энергиях (больше  $E_1(N)$ ) чис-

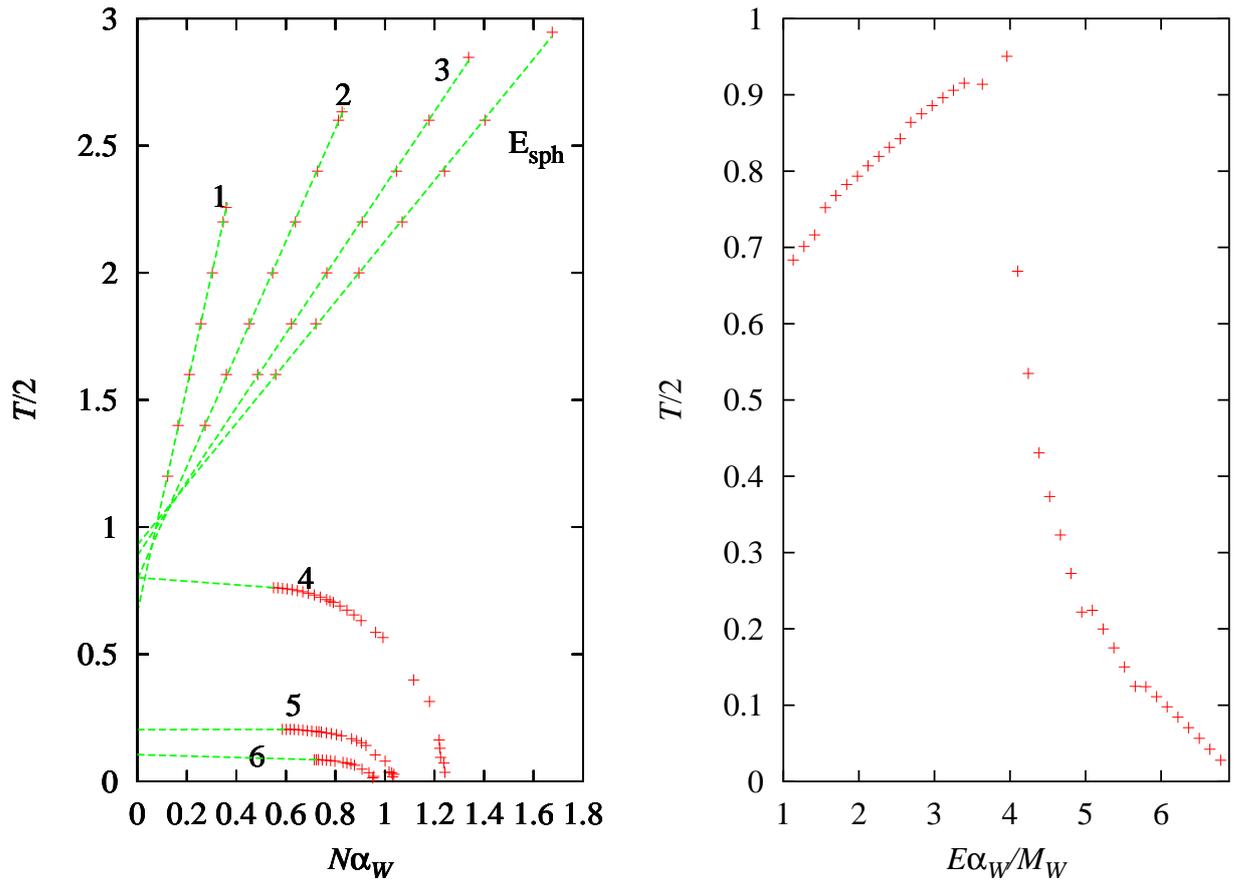


Рис. 2.16. Слева:  $T(N)/2$  для различных энергий; у линий указаны значения  $E\alpha_W/M_W$ . Точки — результаты численных вычислений, линии — экстраполяция. Справа: результат экстраполяции  $T(E)/2$  в нулевое начальное число частиц.

ленные данные позволяют предположить, что с уменьшением  $N$  параметр  $T$  выходит на константу, и продолжение его в  $N = 0$  с помощью линейной функции также дает хорошее приближение. С помощью функции  $T(E)$  значения показателя экспоненты  $F(E)$  восстанавливается с помощью интегрирования уравнения (2.34). Вплоть до энергии сфалерона, полученная таким образом оценка близка к однопетлевому аналитическому результату [43, 89–91], который дает три члена низкоэнергетического разложения,

$$\frac{4\pi}{\alpha_W} F(E) = \frac{4\pi}{\alpha_W} \left[ 1 - \frac{9}{8} \left( \frac{E}{E_0} \right)^{4/3} + \frac{9}{16} \left( \frac{E}{E_0} \right)^2 \right], \quad (2.35)$$

где  $E_0 = \sqrt{6}\pi M_W / \alpha_W$ . Кроме этого, при энергиях, меньших сфалеронной, наши результаты совпадают с аналитической оценкой работ [87, 88]. С другой стороны, поведение  $F_{HG}(E)$  радикально меняется при  $E \gtrsim E_{\text{sph}}$ . Это отвечает изменению туннельного поведения при  $E \gtrsim E_{\text{sph}}$  — система начинает туннелировать «на верхушку» барьера. Наши численные результаты показывают, что показатель экспоненты подавления  $F_{HG}(E)$  выполаживается, и процессы с изменением топологии в действительности значительно сильнее подавлены при  $E \gtrsim E_{\text{sph}}$  чем следует из оценки (2.35) или оценки работ [87, 88]. Наша оценка показателя экспоненты туннелирования и аналитические предсказания изображены на рис. 2.15.

Таким образом, несмотря на то, что наши численные результаты охватывают только ограниченную часть возможных значений энергии и начального числа частиц, они позволяют получить и ограничение, и оценку экспоненты подавления процессов с изменением топологического числа в двухчастичных столкновениях в электрослабой теории при энергиях, значительно превышающих энергию сфалерона. Сечение таких процессов остается экспоненциально подавленным вплоть до очень высоких энергий,

по крайней мере, порядка 250 ТэВ. В действительности, энергия, при которой экспоненциальное подавление пропадает (если пропадает вообще), вероятно значительно выше; на это указывает сравнение нашего ограничения снизу и собственно оценки экспоненты подавления при энергиях, превышающих  $E_{\text{sph}}$ , см. рис. 2.15.

## Глава 3

### Многочастичные процессы в модели $\lambda\varphi^4$

#### 3.1 Связь сингулярных решений с сечениями в древесном приближении. Общий формализм

Опишем метод нахождения экспоненты для древесных сечений в режиме (4) [66–68]. Рассмотрим процесс распада виртуальной частицы с энергией  $E$  и импульсом  $\mathbf{P} = 0$  в  $n$  реальных частиц в модели с лагранжианом (2). Для этого рассмотрим матричный элемент  $\langle\beta|S\varphi|0\rangle$  в представлении когерентных состояний [48, 74, 75] в пространстве–времени Минковского ( $\langle\beta|$  — некоторое когерентное состояние)

$$\langle\beta|S\varphi|0\rangle = \lim_{\substack{T_i \rightarrow -\infty \\ T_f \rightarrow +\infty}} \int D\varphi D\varphi_i D\varphi_f \varphi(E, \mathbf{P}) e^{B_i(\varphi_i) + B_f(\beta^*, \varphi_f) + i \int \mathcal{L} d^{d+1}x}, \quad (3.1)$$

где

$$\varphi(E, \mathbf{P}) = \int dt d^d x \varphi(t, \mathbf{x}) e^{-iEt + i\mathbf{P}\mathbf{x}}, \quad \varphi_{\mathbf{k}}(t) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} \varphi(t, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

$$\varphi_i(\mathbf{k}) = \varphi_{\mathbf{k}}(T_i), \quad \varphi_f(\mathbf{k}) = \varphi_{\mathbf{k}}(T_f),$$

а граничные члены имеют вид

$$B_i(\varphi_i) = -\frac{1}{2} \int d^d k \omega_{\mathbf{k}} \varphi_i(\mathbf{k}) \varphi_i(-\mathbf{k}),$$

$$B_f(\beta^*, \varphi_f) = -\frac{1}{2} \int d^d k \omega_{\mathbf{k}} \varphi_f(\mathbf{k}) \varphi_f(-\mathbf{k})$$

$$-\frac{1}{2} \int d^d k \beta_{\mathbf{k}}^* \beta_{-\mathbf{k}}^* e^{2i\omega_{\mathbf{k}} T_f} + \int d^d k \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} T_f} \beta_{\mathbf{k}}^* \varphi_f(-\mathbf{k}),$$

где  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{1 + \mathbf{k}^2}$ . На древесном уровне интеграл (3.1) определяется значением подынтегрального выражения в седловой точке. Условиями экстре-

мальности экспоненты являются классические уравнения поля

$$\partial_\mu^2 \varphi + \varphi + \lambda \varphi^3 = 0 \quad (3.2)$$

со следующими граничными условиями:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} a_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad \varphi_{\mathbf{k}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} + c_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (3.3)$$

где  $a_{\mathbf{k}}$  и  $c_{\mathbf{k}}$  произвольны. При  $t \rightarrow -\infty$  решение  $\varphi_c(\beta^*, t, \mathbf{x})$  имеет только положительно-частотную часть. Из закона сохранения энергии следует, что при  $t \rightarrow +\infty$  в нем не должно содержаться отрицательных частот, т. е.  $c_{\mathbf{k}} = 0$ , а показатель экспоненты в (3.1) обращается в нуль. Таким образом, матричный элемент в древесном приближении имеет вид фурье-образа седлового решения

$$A_E(\beta^*) \equiv \langle \beta | S\varphi | 0 \rangle_{\text{tree}} = \int dt d^d x \varphi_c(\beta, t, \mathbf{x}) e^{-iEt + i\mathbf{P}\mathbf{x}}. \quad (3.4)$$

В соответствии с формализмом когерентных состояний древесную амплитуду  $1 \rightarrow n$  можно выразить из (3.4) следующим образом

$$A_{1 \rightarrow n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \left. \frac{\partial^n A_E(\beta^*)}{\partial \beta_{\mathbf{k}_1}^* \dots \partial \beta_{\mathbf{k}_n}^*} \right|_{\beta^*=0}. \quad (3.5)$$

Для вычисления  $n$ -частичного сечения введем производящую функцию

$$\Sigma(\xi, E) = \frac{1}{Z} \int D\beta D\beta^* \exp \left\{ - \int d^d k \beta_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^* \right\} A_E(\sqrt{\xi} \beta^*) \bar{A}_E(\sqrt{\xi} \beta), \quad (3.6)$$

где  $Z$  — нормировочный фактор. Полное сечение дается формулой

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E, n) = \left. \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \Sigma(\xi, E) \right|_{\xi=0},$$

в чем можно убедиться [50, 68], непосредственно продифференцировав (3.6) и воспользовавшись формулой (3.5).

С помощью формулы Коши можно переписать выражение для  $\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}$  в виде

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = \frac{1}{Z} \oint \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \int D\beta D\beta^* \exp \left\{ -\frac{1}{\xi} \int d^d k \beta^* \beta \right\} A_E(\beta^*) \bar{A}_E(\beta) . \quad (3.7)$$

Этот интеграл опять можно вычислить с помощью метода перевала, учитывая наличие нулевых мод, отвечающих временным трансляциям, и возможных экспоненциально больших множителей в  $A_E(\beta^*)$ . Для того, чтобы от них избавиться, произведем следующую замену переменных:

$$\beta_{\mathbf{k}}^* = b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t_0 - i\mathbf{k}\mathbf{x}_0} .$$

В результате этой замены получим

$$\begin{aligned} \varphi_c(\beta^*, t, \mathbf{x}) &= \varphi(b^*, t + t_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \\ A_E(\beta^*) &= A_E(b^*) e^{iEt_0 - i\mathbf{P}\mathbf{x}_0} . \end{aligned}$$

Здесь  $t_0, \mathbf{x}_0$  — коллективные координаты, а  $b_{\mathbf{k}}$  — новые переменные интегрирования, на которые мы наложим в дальнейшем связь, нарушающую трансляционную инвариантность, отвечающую закону сохранения энергии-импульса. В новых переменных выражение (3.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} &= \frac{1}{Z} \oint \frac{d\xi}{\xi} \int DbDb^* dx_0 dx'_0 J A_E(b^*) \bar{A}_E(b) \times \\ &\times \exp \left[ iE(t_0 - t'_0) - i\mathbf{P}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\xi} \int d^d k b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t_0 - t'_0) - i\mathbf{k}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)} - n \ln \xi \right] , \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $J$  содержит  $\delta$ -функцию связи на переменные  $b_{\mathbf{k}}$  и соответствующий детерминант Фаддеева–Попова, который не дает экспоненциального вклада и не будет рассматриваться далее. Интегрирование по  $(x_0 + x'_0)$  дает просто объемный фактор, который сокращается с  $Z$ . Считая, что в  $A_E$  больше

нет экспоненциальных факторов, можем теперь применить метод перевала (седловая точка по переменной  $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)$  равна нулю, так как мы работаем в системе центра масс  $\mathbf{P} = 0$ , и мы больше не будем выписывать эту переменную):

$$\sigma^{\text{tree}}(E, n) \propto e^{W_{\text{tree}}^{\text{extr}}}, \quad (3.9)$$

где  $W_{\text{tree}}^{\text{extr}}$  является экстремальным значением функционала

$$W_{\text{tree}}(T, \theta, b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*) = ET - n\theta - e^{-\theta} \int d^d k b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} e^{\omega_{\mathbf{k}} T} \quad (3.10)$$

по отношению к  $T = i(t_0 - t'_0)$ ,  $\theta = \ln \xi$ ,  $b_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}^*$ .

Связь, налагаемая на  $b_{\mathbf{k}}$ , должна нарушать трансляционную инвариантность в пространстве–времени. Как уже говорилось выше, мы хотели бы наложить условие на  $b_{\mathbf{k}}$  таким образом, чтобы  $A_E(b^*)$  не содержало экспоненциальных факторов. Продолжим полученное решение  $\varphi_c$  в область комплексного времени, тогда, согласно граничному условию (3.3) и равенству  $c_{\mathbf{k}} = 0$ , оно должно стремиться к нулю при  $\text{Im } t = \tau \rightarrow +\infty$ , где  $\tau$  — евклидово время. Так как мы не рассматриваем инстантонных эффектов, то есть не интересуемся классическими решениями, регулярными в евклидовом пространстве (в теории  $\lambda\varphi^4$  с  $\lambda > 0$  их просто нет), то  $\varphi_c$  должно быть сингулярным в евклидовом пространстве-времени. В общем случае  $\varphi_c$  имеет особенности на  $d$ -мерной поверхности  $\tau = \tau_s(\mathbf{x})$ , при этом  $\tau_s(\mathbf{x}) < 0$  для решений, гладких на действительной оси времени. Интеграл типа (3.4) определяется особенностями функции  $\varphi_c$ , а именно, он пропорционален  $\exp(E\tau_m + i\mathbf{P}\mathbf{x}_m)$ , где  $\tau_m$  и  $\mathbf{x}_m$  — координаты особенности, лежащей ближе всего к действительной оси ( $\tau_m < 0$ ). Поэтому, чтобы  $\varphi_c(b)$  не содержало экспоненциальных факторов, потребуем  $\tau_m \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{x}_m = 0$ . Дру-

гими словами, мы требуем, чтобы поверхность сингулярностей касалась<sup>1</sup> в евклидовом времени снизу поверхности  $\tau = 0$  в точке  $\mathbf{x} = 0$ , то есть  $\tau_s(\mathbf{x} = 0) = 0$ ; и  $\tau_s(\mathbf{x}) < 0$  при  $\mathbf{x} \neq 0$ . Это ограничение нарушает трансляционную инвариантность в пространстве-времени, то есть действительно представляет собой связь, выделяющую нулевые моды.

Кроме того, так как мы работаем в системе центра масс, и в задаче нет выделенного направления ( $\mathbf{P} = 0$ ), то поверхность сингулярности (как и само решение) обладает симметрией относительно пространственных вращений ( $O(d)$ -симметрией). Предполагая, что решение, сингулярное на заданной поверхности и спадающее на бесконечности, единственно, получаем, что поверхности сингулярности решений и их частотные компоненты  $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*$  находятся во взаимно однозначном соответствии, и варьирование по фурье-компонентам поля  $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*$  (удовлетворяющим упомянутому ограничению) и варьирование поверхности сингулярности взаимозаменяемы.

Сформулируем теперь метод получения сечения при любых  $E$  и  $n$ :

- Находятся  $O(d)$ -симметричные решения  $\varphi(\tau, \mathbf{x})$  евклидовых уравнений поля

$$\partial^2 \varphi - \varphi - \lambda \varphi^3 = 0, \quad (3.11)$$

сингулярные на поверхности  $\tau_s(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $\tau_s(0) = 0$  и имеющие следующую асимптотику при  $\tau \rightarrow \infty$ :

$$\int \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} \varphi(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-\omega_{\mathbf{k}}\tau}. \quad (3.12)$$

- Вычисляются его частотные компоненты  $b_{\mathbf{k}}$  и по формуле (3.10) получается  $W$ .

---

<sup>1</sup>Отметим, что в действительности достаточно потребовать только стремления  $\tau_s \rightarrow 0$  в точке  $\mathbf{x} = 0$

- Экстремизируется  $W$  (3.10) по всем описанным поверхностям сингулярностей (это эквивалентно экстремизации по  $b_k$  с обсуждавшейся выше связью), а также по  $T$  и  $\theta$ . Тогда древесное сечение дается выражением (3.9).

Решение описанной граничной задачи можно найти аналитически только в специальных предельных случаях (они будут вкратце обсуждаться в разделе 3.4). При численном же вычислении невозможно выполнить экстремизацию функционала (3.10) по бесконечномерному пространству поверхностей сингулярности, можно лишь воспользоваться методом Рэлея–Ритца, т. е. выбрать некоторый конечномерный подкласс этих поверхностей, по которому и максимизировать функционал. Рассмотрим этот процесс подробнее. Пусть функционал  $\int d^d k b_k b_k^* e^{\omega_k T}$  достигает минимального значения для некоторых  $b_k$ :  $\int d^d k b_k b_k^* e^{\omega_k T} \Big|_{\min} = C(T) > 0$ . Зафиксируем теперь некоторое семейство поверхностей сингулярности  $\Sigma(T)$ . Для него  $\int d^d k b_k b_k^* e^{\omega_k T} \Big|_{\Sigma(T)} = C_\Sigma(T) \geq C(T)$  для всех значений  $T$ . После взятия седлового значения для  $\theta$ , равного  $-\ln n + \ln C(T)$ , получаем, что

$$W(T) = n \ln n - n + ET - n \ln C(T) \quad \text{имеет экстремум при } T_1,$$

$$W_\Sigma(T) = n \ln n - n + ET - n \ln C_\Sigma(T) \quad \text{имеет экстремум при } T_2.$$

Сравнивая  $W(T_1)$  и  $W_\Sigma(T_2)$ , можно получить следующие цепочки неравенств:

$$W(T_1) \geq W(T_2) \geq W_\Sigma(T_2) \quad \text{если } W \text{ имеет максимум при } T_1;$$

$$W_\Sigma(T_2) \leq W_\Sigma(T_1) \leq W(T_1) \quad \text{если } W_\Sigma \text{ имеет минимум при } T_2$$

(при вычислении реализуется второй случай). Таким образом, ограничившись лишь подклассом поверхностей сингулярности, мы получаем ограничение снизу на точное значение  $W_{\text{tree}}(E, n)$ .

### 3.2 Разложение по сферическим модам

Дальнейшие вычисления будем проводить в  $(3 + 1)$ -мерном пространстве-времени. Кроме того, мы будем рассматривать только компактные поверхности сингулярности.

Так как единственное требование к поверхности сингулярности состоит в том, что в точке  $\mathbf{x} = 0$  она касается плоскости  $\tau = 0$ , а в остальных пространственных точках  $\tau_s(\mathbf{x}) < 0$ , можно задавать конфигурации следующим образом. Выберем сферу радиуса  $R_s$ , с центром в начале координат. Будем рассматривать такие конфигурации поля  $\varphi$ , что в точке  $\tau = R_s$ ,  $\mathbf{x} = 0$  значение поля равно бесконечности, а во всех точках  $\sqrt{\mathbf{x}^2 + \tau^2} > R_s$  оно конечно. Тогда мы можем сказать, что поверхность сингулярности для такого поля касается плоскости  $\tau = R_s$  при  $\mathbf{x} = 0$  и целиком лежит внутри выбранной сферы, т. е.  $\tau_s(\mathbf{x}) \leq R_s$ . Такое описание подходит лучше всего для поверхностей, имеющих вид немного сжатой с боков сферы, которые, как это будет видно из результатов, нас и интересуют. Остается только совершить замену координат  $\tau \rightarrow \tau + R_s$ , чтобы сдвинуть сингулярность в начало координат. Это эквивалентно следующему изменению частотных компонент поля:

$$b_{\mathbf{k}} = \tilde{b}_{\mathbf{k}} e^{-\omega_{\mathbf{k}} R_s}, \quad (3.13)$$

где  $\tilde{b}_{\mathbf{k}}$  — Фурье компоненты поля, сингулярного в точке  $(R_s, 0)$ .

В предположении, что полевая конфигурация имеет пространственную  $O(3)$  симметрию, получаем, что поле является функцией от двух переменных,  $\varphi(\rho, \theta)$ , где  $\theta$  — угол между радиус-вектором и осью  $\tau$ , а  $\rho$  — длина радиус вектора (в 4-х мерном евклидовом пространстве). Евклидовы урав-

нения поля можно получить, варьируя следующее действие:

$$S = 4\pi \int_0^\pi d\theta \int d\rho \rho^3 \sin^2 \theta \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right\}. \quad (3.14)$$

Перейдем к разложению по сферическим модам:

$$\varphi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\rho) C_n^{(1)}(\cos \theta), \quad (3.15)$$

где  $C_n^{(1)}(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$  — полиномы Гегенбауэра. Асимптотически при  $\rho \rightarrow \infty$  функции  $\varphi_n(\rho)$  имеют вид

$$\varphi_n(\rho) = a_n \frac{K_{n+1}(\rho)}{\rho}, \quad (3.16)$$

где  $K_n(x)$  — функции Макдональда. Коэффициенты  $\tilde{b}_{\mathbf{k}}$  разложения такой полевой конфигурации по плоским волнам равны:

$$\tilde{b}_{\mathbf{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{2\pi} \frac{C_n^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}.$$

Соответственно, интеграл в (3.10) выражается через коэффициенты  $a_n$  следующим образом:

$$I(z) \equiv \int \tilde{b}_{\mathbf{k}}^* \tilde{b}_{\mathbf{k}} e^{-\omega_{\mathbf{k}} z} d^3 \mathbf{k} = 2\pi^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n a_m \left[ K_{n+m+2}(z) - K_{n-m}(z) \right], \quad (3.17)$$

где  $z = 2R_s - T$ . Подставляя разложение по модам (3.15) в (3.14), получаем выражение для действия через сферические моды, условие экстремальности которого и дает представление уравнения (3.11) через сферические моды  $\varphi_n(\rho)$ .

На бесконечности частотные компоненты должны иметь вид (3.16), т. е. не иметь растущей составляющей.

Необходимо также наложить второе граничное условие, которое обеспечит обращение поля в бесконечность на некоторой поверхности сингулярности, удовлетворяющей условиям, описанным в начале раздела. Чтобы корректно сформулировать это условие, необходимо немного отойти от сингулярности, т. е. заменить условие  $\varphi(R_s, 0) = \infty$  условием  $\varphi(R, 0) = A$ , где  $A \gg 1/\sqrt{\lambda}$ . При этом около точки  $(R_s, 0)$  можно пренебречь в уравнении массовым членом, а поверхность сингулярности в первом приближении заменить плоскостью. Тогда  $\varphi$  в этой области имеет вид

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{l(x)},$$

где  $l(x)$  — расстояние от точки  $x$  до поверхности сингулярности. Отсюда сразу получаем, что настоящая сингулярность находится на расстоянии

$$R_s = R - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{A} \quad (3.18)$$

от начала координат.

Таким образом, поверхность сингулярности, удовлетворяющая необходимым ограничениям (точнее ее форму мы опишем позднее), определяется набором сферических компонент

$$c_n = \varphi_n(R), \quad (3.19)$$

которые должны удовлетворять условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1) = A, \quad (3.20)$$

т. е.  $\varphi(R, \theta = 0) = A$ ; а также условию

$$\varphi(R, \theta \neq 0) \leq A, \quad (3.21)$$

которое в простейшем случае двух не равных нулю компонент  $c_n$  сводится к тому, что обе они положительны.

Простейшие конфигурации —  $O(4)$  симметричны. Они задаются как  $c_0 = A$  и  $c_n = 0$  для всех остальных  $n$  и характеризуются в действительности только одним параметром — радиусом поверхности сингулярности  $R$ .

Проделаем теперь экстремизацию по параметрам  $T$ ,  $\theta$  и поверхностям сингулярности. С помощью (3.13) и (3.17) можно записать выражение (3.10) в виде

$$W_{\text{tree}}(T, \theta, b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*) = ET - n\theta - I(z)e^{-\theta},$$

где  $z = 2R_s - T$ . Легко написать условия стационарности этого выражения по  $T$  и  $\theta$

$$n = I(z)e^{-\theta}, \quad E = -I'(z)e^{-\theta}, \quad (3.22)$$

где  $I'(z)$  — производная от выражения (3.17). Окончательно имеем

$$W_{\text{tree}}(b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*) = n \ln \frac{\lambda n}{16} - n + nf(\varepsilon), \quad (3.23)$$

$$f(\varepsilon) = (\varepsilon + 1)T + \ln 16 - \ln \lambda I(z), \quad (3.24)$$

где  $T$  выражается через  $\varepsilon$  из уравнения

$$\varepsilon + 1 = -\frac{I'(z)}{I(z)}, \quad (3.25)$$

которое следует из (3.22).

Практически удобнее проводить процедуру экстремизации несколько в другом порядке: зафиксировать некоторое значение  $T$ , затем найти минимум по всем поверхностям сингулярности ( $b_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}^*$ ) величины  $I(z)$  и определить соответствующее значение  $\varepsilon$  из (3.25).

Заметим, что функция  $f(\varepsilon)$  не зависит от  $\lambda$ . Действительно, произведем замену

$$\varphi \rightarrow \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Тогда уравнение (3.11) переходит в уравнение на  $\tilde{\varphi}$  с  $\lambda = 1$ , а интеграл (3.17) преобразуется как

$$I(z) \rightarrow \frac{\tilde{I}(z)}{\lambda},$$

и зависимость от  $\lambda$  в выражении (3.24) пропадает. Таким образом, для вычисления  $f(\varepsilon)$  значение  $\lambda$  можно положить равным единице.

В случае, когда  $c_n \ll c_0$  (или, что то же самое,  $c_n \ll A$ ) для всех  $n > 0$ , несложно определить отличие поверхности сингулярности соответствующей полевой конфигурации от сферы. В этом случае поле  $\varphi$  достаточно велико при  $\rho = R$  для всех  $\theta$ , что означает, что можно везде в этой области пользоваться приближением безмассового поля. Будем также полагать, что радиус  $R$  достаточно велик, чтобы считать в каждой точке поверхность сингулярности плоскостью. Тогда при помощи (3.18) сразу получаем

$$\Delta R_s(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left( \frac{1}{\varphi(R, \theta)} - \frac{1}{\varphi(R, 0)} \right),$$

где  $\Delta R_s(\theta) = R_s(0) - R_s(\theta)$  характеризует отличие поверхности сингулярности от сферической. На рисунке 3.1 изображена форма поверхности сингулярности для характерной конфигурации, использовавшийся при вычислениях.

### 3.3 Численное нахождение древесных сечений

В случае, когда мы ограничиваемся  $O(4)$  симметричными решениями (однопараметрическое задание поверхностей сингулярности), задача чрезвы-

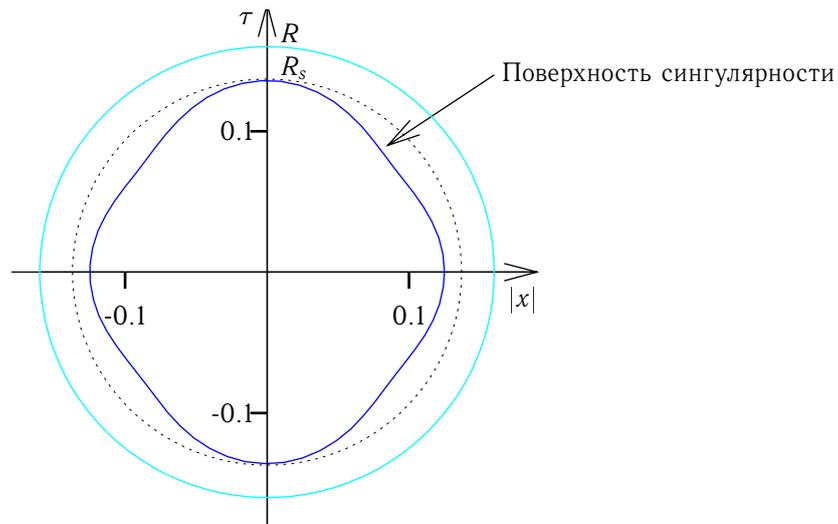


Рис. 3.1. Поверхность сингулярности при энергии  $\varepsilon = 10$  (сплошная линия). На бесконечности включена 4-ая сферическая гармоника. Изображена также сфера радиуса  $R$ , на которой можно сформулировать условия на  $c_n$ .

чайно проста: она сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения на  $\varphi_0(\rho)$ . Причем даже необязательно решать граничную задачу, можно задавать различные значения  $a_0$  (т. е. начальные условия на бесконечном  $\rho$ ) и находить отвечающие им радиусы поверхности сингулярности  $R_s$ . Ограничение на  $f(\varepsilon)$ , полученное этим методом, изображено на рисунке 3.2 сплошной линией [69].

Если же мы не хотим ограничиваться сферически симметричными модами, необходимо, вообще говоря, решать граничную задачу (3.11). Решать ее прямыми методами тяжело по следующей причине: для сходимости суммы (3.17) необходимо быстрое спадание значения  $\varphi_n$  при увеличении номера гармоники (причем требуется это на большом радиусе, т. е. там, где поле уже само по себе мало), а задается конфигурация при таком способе решения формой поверхности сингулярности, т. е. фиксацией больших значений поля; соответственно, задача чрезвычайно неустойчива. По этой же при-

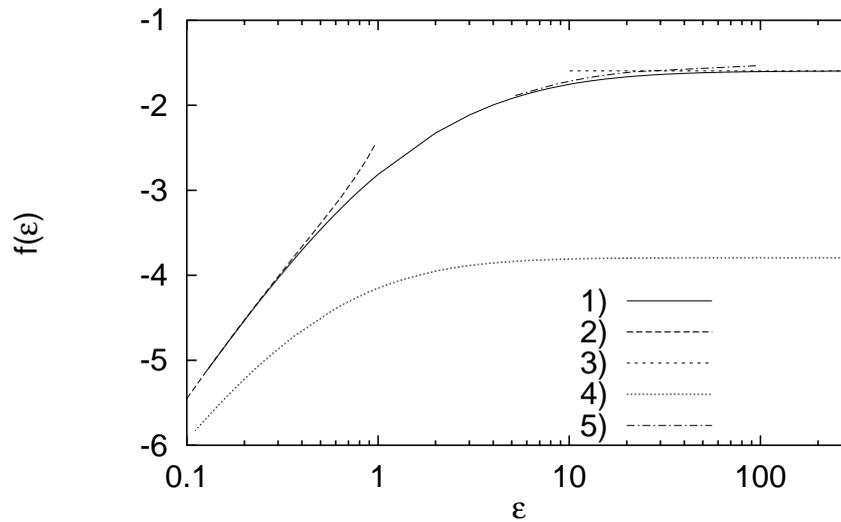


Рис. 3.2. Ограничения на  $f(\varepsilon)$ . 1)  $O(4)$ -симметричное ограничение. 2) Аналитическая оценка в случае малых удельных энергий. 3) Ограничение (снизу) при высоких энергиях. 4) Ограничение Волошина. 5) Ограничение, получаемое при включении 4-ой сферической гармоники.

чине невозможно решать граничную задачу в разложении по сферическим компонентам, задавая значения  $\varphi_n$  на радиусе  $R$  около сингулярности.

Однако оказывается возможным применить метод, похожий на использованный при решении  $O(4)$  симметричной задачи. Фиксируем значения  $a_n$ , т. е. сферической моды на бесконечности (что эквивалентно заданию  $b_k$ ) и будем решать систему *обыкновенных* дифференциальных уравнений с заданными таким образом *начальными* условиями. При достаточно малом радиусе  $R$  поле обратится в бесконечность (точнее, превысит некоторую большую величину  $A$ ). Если значения  $c_n = \varphi_n(R)$  на этом радиусе удовлетворяют условиям (3.20) и (3.21), то данная конфигурация удовлетворяет всем выдвинутым требованиям. Оказывается, что это выполняется при достаточно большом множестве значений  $a_n$  на бесконечности. В частности, можно задавать  $a_n$  равными нулю для всех  $n \neq 0, k$  для некоторого фикси-

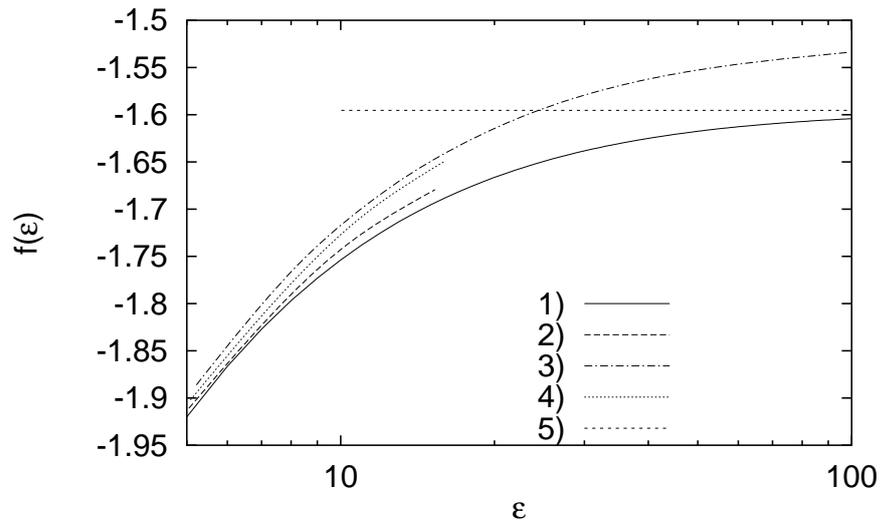


Рис. 3.3. Ограничения на  $f(\varepsilon)$ . Несферические результаты (увеличенная часть графика на рис. 3.2). 1)  $O(4)$ -симметричное ограничение. 2) Ограничение, получаемое при включении 2-ой гармоники. 3) 4-ой гармоники. 4) 6-ой гармоники. 5) Ограничение (снизу) при высоких энергиях.

рованного  $k$ .

Основной проблемой такого метода (и вообще почти любого метода, связанного с разложением по частотным составляющим), является необходимость ограничиться при вычислениях конечным числом сферических мод. Но основные вызванные этим искажения в данной задаче проявляются только на достаточно малых расстояниях от поверхности сингулярности (в сильно нелинейной области), и не приводят к значительной ошибке в определении  $R_s$  при не слишком высоких энергиях.

Вычисления были реализованы с помощью метода Булича–Стоера [92], основанного на идее аналитического продолжения по величине  $h$  шага вычислений на нулевой шаг  $h = 0$ , который дает заметный выигрыш по времени по сравнению с методом Рунге–Кутты. Вычисления проводились с 20, 40 и 80 сферическими модами, причем оказалось что 20 вполне до-

статочно для достижения разумной точности. В этом случае нахождение одной полевой конфигурации (для заданных  $a_n$ ) составляет около 3 минут на компьютере Pentium 166.

Для поиска минимума  $I(2R_s - T)$  по  $a_n$  (что эффективно представляет собой минимизацию по  $b_k, b_k^*$ ) использовался метод многомерного симплектического спуска [92], который не требует никакой дополнительной информации о минимизируемой функции (т. е. не требует знания ее производных). Для нахождения минимума оказывалось необходимым сделать около 50 вычислений  $I(2R_s - T)$  для различных конфигураций.

Вычисления производились с заданием на бесконечности двух ненулевых мод  $a_0$  и  $a_k$ . Исследованы были все значения  $k$ , меньшие 8. Максимальное отличие от  $O(4)$  симметричного результата наблюдалось при  $k = 4$ . Напомним, что так как мы получаем ограничение снизу на  $f(\varepsilon)$  методом Рэлея–Ритца, то нас интересует именно максимальное получаемое значение  $f(\varepsilon)$ . На рисунке 3.3 приведены результаты для  $k = 2, 4$  и  $6$ , а также для  $O(4)$  симметричного случая. Для меньших энергий  $\varepsilon$  отличие от сферического вычисления становится незначительным, а для больших — радиус сингулярности  $R_s$  становится малым и возрастает относительная погрешность в его определении. Вычисления для  $O(4)$  симметричного случая проводились для большего интервала энергий, что отображено на графике 3.2 вместе с некоторыми аналитическими результатами (см. раздел 3.4).

Интерес представляет также форма поверхности сингулярности, отвечающая минимальному значению  $I(2R_s - T)$ . На рисунке 3.1 приведена поверхность, соответствующая значениям  $\varepsilon = 10$  и  $k = 4$ .

### 3.4 Сравнение численных и аналитических результатов

В предельных случаях малых и очень больших энергий оказывается возможным провести сформулированную в разделе 3.1 процедуру аналитически [66, 93]. Приведем здесь эти результаты для сравнения.

**Низкоэнергетический предел.** В случае малых  $\varepsilon$  можно рассмотреть решения вида

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{sh}(\tau - \tau_s(\mathbf{x}))}} ,$$

которые удовлетворяет уравнению (3.11) с точностью до  $O((\partial_x \tau_s)^2)$  (случай, когда  $\tau_s(\mathbf{x}) = 0$  при всех  $\mathbf{x}$ , отвечает пороговому рождению частиц с нулевым импульсом). Кроме того, можно найти в явном виде поправки порядков  $(\partial_x \tau_s)^2$  и  $(\partial_x \tau_s)^4$  к этому выражению. В результате можно получить следующую оценку [66, 93]:

$$f(\varepsilon) = \frac{3}{2} \left( \ln \frac{\varepsilon}{3\pi} + 1 \right) - \varepsilon \frac{17}{12} + \frac{\varepsilon^2}{432} (1327 - 96\pi^2) + O(\varepsilon^3) . \quad (3.26)$$

Она изображена на рисунке 3.2 пунктирной линией и хорошо совпадает с численной оценкой при  $\varepsilon < 0.5$ .

**Ультрарелятивистский предел.** В случае больших энергий можно пренебречь массовым членом в уравнении поля и рассматривать безмассовую теорию  $\varphi^4$ . В ней известно  $O(4)$  симметричное решение — инстантон Фубини–Липатова [94, 95], из которого просто сконструировать решение, сингулярное в точке  $\tau = \mathbf{x} = 0$  [96]:

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{8}{\lambda \mathbf{x}^2 + (\tau + R_s)^2 - R_s^2}} , \quad (3.27)$$

где  $R_s$  — коллективная координата, определяющая размер поверхности сингулярности. В результате получается ограничение [66, 96]:

$$f(\varepsilon \rightarrow \infty) \geq \ln \frac{2}{\pi^2}. \quad (3.28)$$

Эта величина хорошо согласуется с численными оценками при  $\varepsilon > 50$ .

В ультрарелятивистском случае также известна оценка изменения величины  $f(\varepsilon)$  при небольшой вариации формы поверхности сингулярности [93]. Для этого возмущенное решение записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\sqrt{\lambda/2}R_s + \alpha_m f(\rho) C_m^{(1)}(\cos \theta)}{\rho^2 - R_s^2(1 + \alpha_m C_m^{(1)}(\cos \theta))^2} = \\ &= \varphi_0 + \sum_m \alpha_m C_m^{(1)}(\cos \theta) \phi_m(\rho) + O(\alpha^2), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где

$$\phi_m(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\rho^{2-m} R_s^{m+1}}{(\rho^2 - R_s^2)^2} \left( 1 - \frac{2(m-1)R_s^2}{m+2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{(m-1)m}{(m+2)(m+3)} \frac{R_s^4}{\rho^4} \right).$$

Параметры  $\alpha_m$  описывают отклонение поверхности сингулярности от 4-сферы. Они могут быть легко выражены через параметры  $c_n$  раздела 3.2 путем сравнения формул (3.29) и (3.15), (3.19). Соответствующее изменение  $f(\varepsilon)$  имеет вид

$$\Delta f(\varepsilon) = - \sum_m \sqrt{2} \alpha_m (m+1) \left( \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{3}{(m+2)(m+3)} \right) + O(\alpha_m^2).$$

Эту величину можно найти и при вычислениях в несферическом случае. С учетом того, что она найдена в пределе бесконечной энергии, а численный метод применим только при относительно небольших  $\varepsilon$ , можно ожидать лишь совпадения по порядку величины, которое и имеет место.

**Ограничение Волошина.** Интересно также сравнить полученный результат с другими существующими оценками. С помощью работы [97] можно найти альтернативное ограничение на  $f(\varepsilon)$ , которое получено непосредственным анализом диаграмм. Пусть  $\omega_{\max}$  — наибольшая из энергий отдельных конечных частиц. Выделим в древесной диаграмме подграф, начинающийся одной виртуальной линией и кончающийся  $k$  частицами (в качестве начальной виртуальной линии можно взять любую внутреннюю линию диаграммы). Пропагатор, соответствующий этой виртуальной линии,  $(s_k - m^2)^{-1}$ , удовлетворяет неравенствам<sup>2</sup>

$$\frac{1}{\frac{9}{8}\omega_{\max}^2(k^2 - 1)} < \frac{1}{k^2\omega_{\max}^2 - m^2} \leq \frac{1}{s_k - m^2} \leq \frac{1}{m^2(k^2 - 1)} \quad (3.30)$$

(здесь использовано неравенство  $k^2\omega_{\max}^2 - m^2 < \frac{9}{8}\omega_{\max}^2(k^2 - 1)$ , которое справедливо при  $k \leq 3$ , что всегда выполняется для теории  $\varphi^4$ ). Так как неравенство (3.30) выполняется для всех пропагаторов диаграммы, имеем для амплитуд неравенство

$$|A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(\mathbf{p}_{\text{out}} = 0)|_{m^2 \rightarrow \frac{9}{8}\omega_{\max}^2} < |A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n)| \leq |A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(\mathbf{p}_{\text{out}} = 0)| .$$

Соответствующее нижнее ограничение на  $f(\varepsilon)$ , полученное в работе [97], указано на рисунке 3.2.

Как видно из рисунка, полученное в данной работе ограничение гораздо сильнее.

---

<sup>2</sup>Здесь приходится восстановить массу, которая была ранее положена равной единице.

## Заключение

- Сформулирован метод квазиклассического вычисления вероятностей туннелирования в калибровочных теориях поля, позволяющий исследовать процессы с фиксированной энергией и числом частиц в начальном состоянии. Метод реализован в виде компьютерного кода, эффективно решающего требуемую граничную задачу на параллельных суперкомпьютерах и компьютерных кластерах.
- Обнаружено качественно новое поведение туннельных решений при энергиях, превышающих высоту барьера между калибровочными вакуумами (энергию сфалерона): туннелирование происходит с образованием состояния около вершины барьера (сфалерона), которое затем распадается классическим образом на элементарные возбуждения. Данный эффект не является специфическим для калибровочных теорий поля, а возникает при анализе туннелирования большинства систем со многими степенями свободы.
- Найдена численно вероятность туннелирования в  $SU(2)$  модели с хиггсовским дублетом, отвечающим бозонному сектору электрослабой теории с углом смешивания  $\theta_W = 0$ , для диапазона начальных энергий  $0.2 < E/E_{\text{sph}} < 2$ , и числа частиц в начальном состоянии, большем  $N > 0.4N_{\text{sph}}$ , где  $E_{\text{sph}} \simeq 8$  ТэВ — энергия сфалерона,  $N_{\text{sph}} \simeq 1.7/\alpha_W$  — число частиц, образующихся при распаде сфалерона.
- Путем экстраполяции результатов в физически интересную область малого числа частиц, соответствующую двухчастичным столкновениям, получено ограничение на вероятность процессов с нарушением фермионных чисел в электрослабой теории. На основе этих дан-

ных сделано заключение, что экспоненциальное подавление вероятности таких процессов присутствует, по крайней мере, до энергии  $30E_{\text{sph}} \simeq 250 \text{ ТэВ}$ .

- Получена оценка на сечение процессов с нарушением барионного и лептонного чисел в столкновениях при высоких энергиях. Вплоть до энергии сфалерона полученная оценка хорошо воспроизводит существовавшие ранее аналитические результаты, полученные с помощью теории возмущений на инстантонном фоне. При энергии сфалерона поведение сечения радикально меняется, и при дальнейшем росте энергии подавление оказывается существенно сильнее, чем предсказывается аналитическими методами.
- Получено аналитическое решение граничной задачи для процессов инстантонного типа в теории  $SU(2)$  при низких энергиях и числах частиц. Полученные результаты использованы для проверки численных расчетов, а также для подтверждения гипотезы о предельном переходе к двухчастичным столкновениям.
- Произведен численный квазиклассический анализ процессов многочастичного рождения в теории  $\lambda\varphi^4$ . Полученные результаты улучшают существующие аналитические ограничения на древесную вероятность многочастичного рождения.

## Приложение А

### Алгоритм разбиений

Дискретизованный вариант уравнений поля, полученный из (2.10) имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_{jI}} = 0$$

(здесь  $\varphi_{jI} = \{a, \alpha, \beta, \mu, \nu\}(t_j, r_i)$  а  $I$  принимает значения от 0 до  $5N - 4$ ,  $j = 0 \dots N_t$ ), а граничные условия

$$\begin{aligned} K_i(\operatorname{Re} \varphi_{-1,I}, \operatorname{Im} \varphi_{-1,I}, \operatorname{Re} \varphi_{0,I}, \operatorname{Im} \varphi_{0,I}) &= 0 \\ K_f(\operatorname{Re} \varphi_{N_t,I}, \operatorname{Im} \varphi_{N_t,I}, \operatorname{Re} \varphi_{N_t+1,I}, \operatorname{Im} \varphi_{N_t+1,I}) &= 0 . \end{aligned}$$

Заметим, что в отличие от уравнения поля, граничные условия не являются аналитическими функциями  $\varphi_I$ . Каждая итерация метода Ньютона–Рафсона имеет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi_{jI} \partial \varphi_{j-1,K}} u_{j-1,K} + \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi_{jI} \partial \varphi_{jK}} u_{jK} + \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi_{jI} \partial \varphi_{j+1,K}} u_{j+1,K} + \frac{\partial S}{\partial \varphi_{jI}} = 0 \quad (\text{A.1})$$

(все остальные вторые производные равны нулю), а следующее приближение дается выражением

$$\varphi_{jI}^{(n+1)} = \varphi_{jI}^{(n)} + u_{jI}$$

Соответствующие выражения для граничных членов получаются аналогичным образом (с точностью до необходимости независимого варьирования по действительным и мнимым частям полей).

Решим сначала все уравнения движения для  $i = 1, \dots, N_t - 1$ . Уравнения (A.1) можно записать в матричной форме

$$\tilde{D}_j^{(-)} \cdot u_{j-1} + \tilde{D}_j \cdot u_j + \tilde{D}_j^{(+)} \cdot u_{j+1} + \tilde{b}_j = 0 \quad (\text{A.2})$$

где  $u_j$  и  $b_j = \frac{\partial S}{\partial \varphi_{jI}}$  являются  $(5N - 4)$ -мерными векторами,  $\tilde{D}_j^{(-)} = \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi_{jI} \partial \varphi_{j-1,K}}$ ,  $\tilde{D}_j = \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi_{jI} \partial \varphi_{jK}}$ ,  $\tilde{D}_j^{(+)} = \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi_{jI} \partial \varphi_{j+1,K}}$  —  $(5N - 4) \times (5N - 4)$  матрицами. Умножая (A.2) на  $\tilde{D}_j^{-1}$  получаем

$$u_j = D_j^{(-)} \cdot u_{j-1} + D_j^{(+)} \cdot u_{j+1} + b_j \quad (\text{A.3})$$

где  $D_j^{(\pm)} = -\tilde{D}_j^{-1} \cdot \tilde{D}_j^{(\pm)}$ ,  $b_j = -\tilde{D}_j^{-1} \cdot \tilde{b}_j$ . Эта система уравнений решается с помощью варианта алгоритма разбиений для решения трехдиагональных систем уравнений (“divide-and-conquer” algorithm). Исключение  $u_j$  для некоторого  $j$  дает

$$u_{j-1} = \left(1 - D_{j-1}^{(+)} \cdot D_j^{(-)}\right)^{-1} \times \\ \left[ D_{j-1}^{(-)} \cdot u_{j-2} + D_{j-1}^{(+)} \cdot D_j^{(+)} \cdot u_{j+1} + (D_{j-1}^{(+)} \cdot b_j + b_{j-1}) \right]$$

$$u_{j+1} = \left(1 - D_{j+1}^{(-)} \cdot D_j^{(+)}\right)^{-1} \times \\ \left[ D_{j+1}^{(-)} \cdot D_j^{(-)} \cdot u_{j-1} + D_{j+1}^{(+)} \cdot u_{j+2} + (D_{j+1}^{(-)} \cdot b_j + b_{j+1}) \right]$$

Так как процесс исключения уравнения изменяет только соседние уравнения, возможно производить исключение всех уравнений с нечетным  $j$  одновременно, получая в результате опять систему типа (A.3), но уже в два раза меньшую. Это второй шаг разбиения. После серии таких шагов получается система из двух уравнений для  $j = 0$  и  $j = N_t$ :

$$u_0 = \hat{D}_0^{(-)} \cdot u_{-1} + \hat{D}_0^{(+)} \cdot u_{N_t} + \hat{b}_0 \quad (\text{A.4a})$$

$$u_{N_t} = \hat{D}_{N_t}^{(-)} \cdot u_0 + \hat{D}_{N_t}^{(+)} \cdot u_{N_t+1} + \hat{b}_{N_t} \quad (\text{A.4b})$$

где  $\hat{D}^{(\pm)}$  и  $\hat{b}$  имеют значения, полученные в результате исключения всех промежуточных уравнений. Добавив к этим уравнениям уравнения, получившиеся при линеаризации граничных условий, которые связывают  $u_{-1}$  с

$u_0$  для начальных граничных условий и  $u_{N_t}$  с  $u_{N_t+1}$  для конечных, определяем поправки  $u_{-1}$ ,  $u_0$ ,  $u_{N_t}$  и  $u_{N_t+1}$ . Заметим, что так как никакой особой структуры у этих четырех уравнений нет, удобно рассматривать их как одну большую систему из  $2 \times 4 \times (5N - 3)$  действительных линейных уравнений, и решать с помощью любого стандартного метода, например, LU-разложения. Подобный подход позволяет легко добавить в систему несколько дополнительных неизвестных (например  $T$  и  $\theta$ ), если уравнения, их определяющие, зависят только от полей в слоях  $-1$ ,  $0$ ,  $N_t$ ,  $N_t + 1$ . Это использовалось при решении системы с  $T' \neq T$ . Вообще говоря, можно было сделать и  $\theta$  свободной переменной, и решать граничную задачу используя в качестве параметров прямо  $E$  и  $N$ , но это не дает никаких преимуществ с вычислительной точки зрения, и не использовалось.

Дальнейшее восстановление  $u$  для всех промежуточных точек легко производится с помощью уравнений (А.3) в порядке обратном порядку исключения уравнений.

Заметим еще, что не обязательно производить исключение уравнений через ряд. Если это исключение производить блоками, то можно добиться эффективного выполнения этого алгоритма на вычислительных кластерах (исключение уравнений через ряд приспособлено только для архитектур с разделяемой памятью). Тогда каждый процессор сключает все уравнения в пределах своего блока, и передает матрицы для граничных уравнений блока единому процессу, которые затем решаются.

## Литература

1. J. Callan, Curtis G., R. F. Dashen, D. J. Gross. The structure of the gauge theory vacuum // -Phys. Lett. -1976. -B63. -p.334–340.
2. R. Jackiw, C. Rebbi. Vacuum periodicity in a Yang-Mills quantum theory // -Phys. Rev. Lett. -1976. -37. -p.172–175.
3. G. 't Hooft. Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies // -Phys. Rev. Lett. -1976. -37. -p.8–11.
4. G. 't Hooft. Computation of the quantum effects due to a four- dimensional pseudoparticle // -Phys. Rev. -1976. -D14. -p.3432–3450. erratum: *ibid.*, -1978, -D18. -p.2199.
5. S. L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics // -Phys. Rev. -1969. -177. -p.2426–2438.
6. J. S. Bell, R. Jackiw. A PCAC puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the sigma model // -Nuovo Cim. -1969. -A60. -p.47–61.
7. W. A. Bardeen. Anomalous ward identities in spinor field theories // -Phys. Rev. -1969. -184. -p.1848–1857.
8. N. S. Manton. Topology in the Weinberg-Salam theory // -Phys. Rev. -1983. -D28. -p.2019.
9. F. R. Klinkhamer, N. S. Manton. A saddle point solution in the Weinberg-Salam theory // -Phys. Rev. -1984. -D30. -p.2212.
10. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts, Y. S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations // -Phys. Lett. -1975. -B59. -p.85–87.
11. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. Шифман. Инстантонная азбука // -УФН. -1982. -136. -С.551–591.

12. V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. On the anomalous electroweak baryon number nonconservation in the early universe // -Phys. Lett. -1985. -155B. -p.36.
13. P. Arnold, L. McLerran. Sphalerons, small fluctuations and baryon number violation in electroweak theory // -Phys. Rev. -1987. -D36. -p.581.
14. P. Arnold, L. McLerran. The sphaleron strikes back // -Phys. Rev. -1988. -D37. -p.1020.
15. A. I. Bochkarev, M. E. Shaposhnikov. Anomalous fermion number nonconservation at high temperatures: Two-dimensional example // -Mod. Phys. Lett. -1987. -A2. -p.991.
16. S. Y. Khlebnikov, M. E. Shaposhnikov. The statistical theory of anomalous fermion number nonconservation // -Nucl. Phys. -1988. -B308. -p.885–912.
17. D. Y. Grigoriev, V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. Sphaleron transitions at finite temperatures: Numerical study in (1+1)-dimensions // -Phys. Lett. -1989. -B216. -p.172.
18. A. N. Kuznetsov, P. G. Tinyakov. Periodic instanton bifurcations and thermal transition rate // -Phys. Lett. -1997. -B406. -p.76–82.
19. K. L. Frost, L. G. Yaffe. From instantons to sphalerons: Time-dependent periodic solutions of SU(2)-Higgs theory // -Phys. Rev. -1999. -D60. -p.105021.
20. G. F. Bonini, S. Habib, E. Mottola, C. Rebbi, R. Singleton, P. G. Tinyakov. Periodic instantons in SU(2) Yang-Mills-Higgs theory // In Copenhagen 1998, Strong and electroweak matter. -1999. -p. 173–182.
21. V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze. Stable anomalous states of superdense matter in gauge theories // -Phys. Lett. -1985. -B165. -p.109–112.

22. V. A. Rubakov. On the electroweak theory at high fermion density // -Prog. Theor. Phys. -1986. -75. -p.366.
23. V. A. Matveev, V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze, V. F. Tokarev. Nonconservation of the fermion number in a cold dense fermion medium in V-A gauge theories // -Theor. Math. Phys. -1986. -69. -p.961–976.
24. V. A. Matveev, V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze, V. F. Tokarev. Fermion number nonconservation and cold neutral fermionic matter in (V-A) gauge theories // -Nucl. Phys. -1987. -B282. -p.700–726.
25. D. Diakonov, V. Y. Petrov. Instability of dense baryon matter and baryon number nonconservation at high-energies // -Phys. Lett. -1992. -B275. -p.459–464.
26. V. A. Rubakov. Electroweak nonconservation of the baryon number in the decay of heavy particles // -JETP Lett. -1985. -41. -p.266–268.
27. J. Ambjorn, V. A. Rubakov. Classical versus semiclassical electroweak decay of a techniskyrmion // -Nucl. Phys. -1985. -B256. -p.434.
28. V. A. Rubakov, B. E. Stern, P. G. Tinyakov. On the electroweak decay of a technibaryon in the soliton model // -Phys. Lett. -1985. -160B. -p.292.
29. A. Ringwald. High-energy breakdown of perturbation theory in the electroweak instanton sector // -Nucl. Phys. -1990. -B330. -p.1.
30. O. Espinosa. High-energy behavior of baryon and lepton number violating scattering amplitudes and breakdown of unitarity in the standard model // -Nucl. Phys. -1990. -B343. -p.310–340.
31. L. McLerran, A. Vainshtein, M. Voloshin. Electroweak interactions become strong at energy above approximately 10-TeV // -Phys. Rev. -1990. -D42. -p.171–179.

32. V. I. Zakharov. Classical corrections to instanton induced interactions // -Nucl. Phys. -1992. -B371. -p.637–658.
33. S. Y. Khlebnikov, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov. Instanton induced cross-section at high-energies: Leading order and beyond // -Mod. Phys. Lett. -1990. -A5. -p.1983–1992.
34. M. Porrati. Dispersion relations and finite size effects in high-energy electroweak interactions // -Nucl. Phys. -1990. -B347. -p.371–393.
35. S. Y. Khlebnikov, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov. Breakdown of semiclassical expansion in instanton sector at high-energies // -Nucl. Phys. -1990. -B347. -p.783–801.
36. S. Y. Khlebnikov, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov. Instanton induced cross-sections below the sphaleron // -Nucl. Phys. -1991. -B350. -p.441–473.
37. L. G. Yaffe. Scattering amplitudes in instanton backgrounds // In Santa Fe Workshop on Baryon Violation at the SSC, Santa Fe, NM, Apr 27-30, 1990. -1990. -p. 46–63.
38. P. B. Arnold, M. P. Mattis. Baryon violation at the SSC? Recent claims reexamined // -Phys. Rev. -1990. -D42. -p.1738–1743.
39. A. H. Mueller. First quantum corrections to gluon-gluon collisions in the one instanton sector // -Nucl. Phys. -1991. -B348. -p.310–326.
40. A. H. Mueller. Leading power corrections to the semiclassical approximation for gauge meson collisions in the one instanton sector // -Nucl. Phys. -1991. -B353. -p.44–58.
41. M. B. Voloshin. Quantum corrections on high-energy lines to amplitudes induced by euclidean field solutions // -Nucl. Phys. -1991. -B359. -p.301–321.

42. S. Y. Khlebnikov, P. G. Tinyakov. Constraint dependence of the instanton calculations and exponentiation of hard - soft corrections at high- energies // -Phys. Lett. -1991. -B269. -p.149–154.
43. P. B. Arnold, M. P. Mattis. Gauge propagator contribution to high-energy baryon number violation // -Mod. Phys. Lett. -1991. -A6. -p.2059–2068.
44. M. P. Mattis, L. D. McLerran, L. G. Yaffe. High-energy anomalous scattering: Is it semiclassical? // -Phys. Rev. -1992. -D45. -p.4294–4302.
45. A. H. Mueller. Baryon number violation in the one instanton sector: A classical procedure of calculation // -Nucl. Phys. -1992. -B381. -p.597–618.
46. X. Li, L. D. McLerran, M. B. Voloshin, R.-t. Wang. Corrections to high-energy particles interacting through an instanton as quantum fluctuations in the position of the instanton // -Phys. Rev. -1991. -D44. -p.2899–2915.
47. M. P. Mattis. The riddle of high-energy baryon number violation // -Phys. Rept. -1992. -214. -p.159–221.
48. P. G. Tinyakov. Instanton like transitions in high-energy collisions // -Int. J. Mod. Phys. -1993. -A8. -p.1823–1886.
49. V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. Electroweak baryon number non-conservation in the early universe and in high-energy collisions // -Usp. Fiz. Nauk. -1996. -166. -p.493–537.
50. V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov. Towards the semiclassical calculability of high-energy instanton cross-sections // -Phys. Lett. -1992. -B279. -p.165–168.
51. P. G. Tinyakov. Multiparticle instanton induced processes and B violation in high-energy collisions // -Phys. Lett. -1992. -B284. -p.410–416.

52. V. A. Rubakov, D. T. Son, P. G. Tinyakov. Classical boundary value problem for instanton transitions at high-energies // -Phys. Lett. -1992. -B287. -p.342.
53. A. N. Kuznetsov, P. G. Tinyakov. False vacuum decay induced by particle collisions // -Phys. Rev. -1997. -D56. -p.1156–1169.
54. A. H. Mueller. Comparing two particle and multiparticle initiated processes in the one instanton sector // -Nucl. Phys. -1993. -B401. -p.93–115.
55. G. F. Bonini, A. G. Cohen, C. Rebbi, V. A. Rubakov. Tunneling of bound systems at finite energies: Complex paths through potential barriers // -quant-ph/9901062.
56. G. F. Bonini, A. G. Cohen, C. Rebbi, V. A. Rubakov. The semiclassical description of tunneling in scattering with multiple degrees of freedom // -Phys. Rev. -1999. -D60. -p.076004.
57. D. T. Son, V. A. Rubakov. Instanton - like transitions at high-energies in (1+1)- dimensional scalar models // -Nucl. Phys. -1994. -B422. -p.195–226.
58. F. Bezrukov, D. Levkov. Theta-instantons in SU(2) Higgs theory // -hep-th/0303136.
59. A. N. Kuznetsov, P. G. Tinyakov. Numerical study of induced false vacuum decay at high- energies // -Mod. Phys. Lett. -1996. -A11. -p.479–490.
60. C. Rebbi, R. Singleton. Computational study of baryon number violation in high- energy electroweak collisions // -Phys. Rev. -1996. -D54. -p.1020–1043.

61. F. Bezrukov, D. Levkov. Transmission through a potential barrier in quantum mechanics of multiple degrees of freedom: complex way to the top // -quant-ph/0301022.
62. F. Bezrukov, D. Levkov, C. Rebbi, V. Rubakov, P. Tinyakov. Semiclassical study of baryon and lepton number violation in high-energy electroweak collisions // -hep-ph/0304180.
63. M. B. Voloshin. On strong high-energy scattering in theories with weak coupling // -Phys. Rev. -1991. -D43. -p.1726–1734.
64. M. V. Libanov, V. A. Rubakov, D. T. Son, S. V. Troitsky. Exponentiation of multiparticle amplitudes in scalar theories // -Phys. Rev. -1994. -D50. -p.7553–7569.
65. M. V. Libanov, D. T. Son, S. V. Troitsky. Exponentiation of multiparticle amplitudes in scalar theories. 2. Universality of the exponent // -Phys. Rev. -1995. -D52. -p.3679–3687.
66. D. T. Son. Semiclassical approach for multiparticle production in scalar theories // -Nucl. Phys. -1996. -B477. -p.378–406.
67. М. В. Либанов, В. А. Рубаков, С. В. Троицкий. Многочастичные процессы и квазиклассика в бозонных теориях поля // -Физика элементарных частиц и атомного ядра. -1997. -28. -С.551–614.
68. V. A. Rubakov. Non-perturbative aspects of multiparticle production // In Proc. of the 2nd Rencontres du Vietnam, Hô Chi Minh City, Vietnam. -Gif-sur-Yvette: Editions Frontieres. -1995. -p. 435–448.
69. F. L. Bezrukov, M. V. Libanov, S. V. Troitsky.  $O(4)$  symmetric singular solutions and multiparticle cross-sections in  $\phi^4$  theory at tree level // -Mod. Phys. Lett. -1995. -A10. -p.2135–2141.

70. Ф. Л. Безруков. Использование классических сингулярных решений для вычисления сечений многочастичных процессов в теории поля // -ТМФ. -1998. -115. -С.358–372.
71. F. Bezrukov, C. Rebbi, V. Rubakov, P. Tinyakov. Instanton-like processes in particle collisions: A numerical study of the SU(2)-Higgs theory below the sphaleron energy // In E. N. Alexeev, V. A. Matveev, K. S. Nirov, V. A. Rubakov, editors, Proc. XI-th Int. School “Particles and Cosmology”, Baksan Valley, Russia, April 18–24, 2001. -INR, Moscow. -2003. -p. 248–266.
72. F. Bezrukov, D. Levkov, C. Rebbi, V. Rubakov, P. Tinyakov. Suppression of baryon number violation in electroweak collisions: Numerical results // -hep-ph/0305300.
73. O. R. Espinosa. Fermions in anomalous processes // -Nucl. Phys. -1992. -B375. -p.263–298.
74. Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования. -М.: Наука, 1986.
75. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. -2-е издание. -М.: Наука, 1988.
76. T. Akiba, H. Kikuchi, T. Yanagida. The free energy of the sphaleron in the Weinberg-Salam model // -Phys. Rev. -1989. -D40. -p.588.
77. S. Y. Khlebnikov, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov. Periodic instantons and scattering amplitudes // -Nucl. Phys. -1991. -B367. -p.334.
78. M. B. Voloshin. Catalyzed decay of false vacuum in four-dimensions // -Phys. Rev. -1994. -D49. -p.2014–2018.
79. I. Affleck. On constrained instantons // -Nucl. Phys. -1981. -B191. -p.429.
80. D. Forster. On the forces between instantons and anti-instantons // -Phys. Lett. -1977. -B66. -p.279.

81. J. Callan, Curtis G., R. F. Dashen, D. J. Gross. Toward a theory of the strong interactions // -Phys. Rev. -1978. -D17. -p.2717.
82. D. Diakonov, V. Y. Petrov. Instanton based vacuum from feynman variational principle // -Nucl. Phys. -1984. -B245. -p.259.
83. B. Ratra, L. G. Yaffe. Spherically symmetric classical solutions in SU(2) gauge theory with a higgs field // -Phys. Lett. -1988. -B205. -p.57.
84. T. M. Gould, S. D. H. Hsu. Space-time symmetries and semiclassical amplitudes // -Mod. Phys. Lett. -1994. -A9. -p.1589–1602.
85. P. Sikivie, L. Susskind, M. B. Voloshin, V. I. Zakharov. Isospin breaking in technicolor models // -Nucl. Phys. -1980. -B173. -p.189.
86. E. Farhi, J. Goldstone, A. Lue, K. Rajagopal. Collision induced decays of electroweak solitons: Fermion number violation with two and few initial particles // -Phys. Rev. -1996. -D54. -p.5336–5360.
87. A. Ringwald. Electroweak instantons / sphalerons at VLHC? // -Phys. Lett. -2003. -B555. -p.227–237.
88. A. Ringwald. From QCD instantons at HERA to electroweak B+L violation at VLHC // -hep-ph/0302112.
89. V. V. Khoze, A. Ringwald. Total cross-section for anomalous fermion number violation via dispersion relation // -Nucl. Phys. -1991. -B355. -p.351–368.
90. D. I. Diakonov, V. Y. Petrov // In Proc. XXVI LINP Winter School. LINP, Leningrad. -1991.
91. A. H. Mueller. On higher order semiclassical corrections to high-energy cross-sections in the one instanton sector // -Nucl. Phys. -1991. -B364. -p.109–126.

92. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. Numerical recipes in C: the art of scientific computing. -Second edition. -Cambridge University Press, 1992.
93. F. L. Bezrukov, M. V. Libanov, D. T. Son, S. V. Troitsky. Singular classical solutions and tree multiparticle cross- sections in scalar theories // -hep-ph/9512342.
94. S. Fubini. A new approach to conformal invariant field theories // -Nuovo Cim. -1976. -34A. -p.521–566.
95. Л. Н. Липатов. Расходимость ряда теории возмущений и псевдочастицы // -Письма в ЖЭТФ. -1977. -25. -С.116–119.
96. S. Y. Khlebnikov. Semiclassical approach to multiparticle production // -Phys. Lett. -1992. -B282. -p.459.
97. M. B. Voloshin. Estimate of the onset of nonperturbative particle production at high-energy in a scalar theory // -Phys. Lett. -1992. -B293. -p.389–394.