**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА**

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики частиц и космологии

Каноническое квантование теорий со старшими производными

Курсовая работа студента
второго курса
Мишнякова Викторва Викторовича

Научный руководитель:
Академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор
Валерий Анатольевич Рубаков

Москва, 2017

Содержание

1 Постановка задачи

Рассмотреть процедуру канонического квантования теории, содержащий старшие производные.
Проквантовать модельную теорию с лагранжианом:

$$L = \ddot{q}^2 + \alpha\dot{q}^2 + \beta q^2 \tag{1}$$

2 Гамильтонов формализм в теориях со старшими производными

Для построения квантовой теории необходимо перейти к гамильтониану. Для этого рассмотрим гамильтонов формализм для теории с лагранжианом вида $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(N)})$. Введем следующие переменные:

$$q_s = q^{(s-1)} \quad s = 1, \dots, N, \quad p^N = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \quad p^s = \frac{\partial L}{\partial q_{s+1}} - \dot{p}^{s+1}$$

Введем гамильтониан следующим образом:

$$H = \sum_{s=1}^{N-1} p^s q_{s+1} + p^N q^{(N)} - L$$

Такой гамильтониан дает канонические уравнения движения:

$$\dot{q}_s = \{q_s, H\}, \quad \dot{p}^s = \{p^s, H\}.$$

Заметим, что гамильтониан содержит N координат и N импульсов. В данной задаче имеем лагранжиан вида (1). Следуя вышесказанному, получаем:

$$q_1 = q, \quad q_2 = \dot{q}$$

$$p^2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 2\ddot{q} = 2\dot{q}_2 \quad p^1 = \frac{\partial L}{\partial q_2} - \dot{p}^2$$

Тогда гамильтониан имеет вид:

$$H = p^1 q_2 + \frac{1}{4}(p^2)^2 - \alpha q_2^2 - \beta q_1^2$$

3 Квантование теории

Постулируем следующие коммутационные соотношения:

$$[q_i, q_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [p_i, q_j] = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

Введем операторы рождения и уничтожения:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}(\omega_i q_i + ip_i), \quad a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}(\omega_i q_i - ip_i)$$

Тогда они удовлетвяют коммутационным соотношениям:

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0$$

Заметим, что в случае произвольного N порядка старшей производной, имелось бы N различных операторов рождения и уничтожения. Гамильтониан, записанный в терминах операторов рождения и уничтожения имеет вид:

$$H = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}(a_1 a_2 + a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2^\dagger) - \frac{\omega_2}{8}(a_2^2 - a_2^\dagger a_2 - a_2 a_2^\dagger + (a_2^\dagger)^2) - \frac{\alpha}{2\omega_2}(a_2^2 + a_2^\dagger a_2 + a_2 a_2^\dagger + (a_2^\dagger)^2) - \frac{\beta}{2\omega_1}(a_1^2 + a_1^\dagger a_1 + a_1 a_1^\dagger + (a_1^\dagger)^2) \quad (2)$$

Теперь необходимо диагонализовать гамильтониан, чтобы найти его спектр. Для этого воспользуемся каноническим преобразованием Боголюбова.
Рассмотрим, сначала, ситуацию в общем виде. Пусть Гамильтониан представляет собой общую квадратичную форму операторов рождения и уничтожения N типов.

$$H = \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(M_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger + M_{\alpha\beta}^* a_\alpha a_\beta), \quad (3)$$

причем:

$$L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}^* \quad M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, N.$$

Операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0 \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, N \quad (4)$$

Проведем преобразование:

$$b_\mu = \sum_\alpha (u_{\mu\alpha} a_\alpha - v_{\mu\alpha} a_\alpha^\dagger) \qquad \mu = 1, \ldots, N \quad (5)$$

Новые операторы удовлетворяют соотношениям, аналогичным (4), что эквивалентно следующим условиям:

$$\sum_\alpha u_{\mu\alpha} u_{\nu\alpha}^* - v_{\mu\alpha} v_{\nu\alpha}^* = \delta_{\mu\nu}, \quad \sum_\alpha u_{\mu\alpha} v_{\nu\alpha} - v_{\mu\alpha} u_{\nu\alpha} = 0 \quad (6)$$

В терминах новых операторов гамильтониан имеет диагональный вид:

$$H = E_0 + \sum_\mu E_\mu b_\mu^\dagger b_\mu \qquad \mu = 1, \ldots, N \tag{7}$$

Определим вакуум как $b_\mu |0\rangle = 0$, тогда собственные состояния такого гамильтониана имеют вид $b_1^{\dagger n_1} b_2^{\dagger n_2} \ldots b_N^{\dagger n_N} |0\rangle$.
Воспользуемся следующим равенством:

$$[b_\mu, H] = E_\mu b_\mu.$$

Подставим в правую и левую часть равенства выражения (3),(5) получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sum_\beta E_\mu \delta_{\alpha\beta} u_{\mu\beta} &= \sum_\beta (v_{\mu\beta} M^*_{\beta\alpha} + L^*_{\alpha\beta} u_{\mu\beta}) \\ \sum_\beta E_\mu \delta_{\alpha\beta} u_{\mu\beta} &= -\sum_\beta (u_{\mu\beta} M_{\beta\alpha} + L_{\alpha\beta} v_{\mu\beta}) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Решая систему, находим u, v, E, которые, при условиях (6) определяют параметры преобразования. В конце концов, найдем:

$$E_0 = -\sum_{\alpha,\beta} E_\mu v^*_{\mu\alpha} v_{\mu\beta}$$

Теперь рассмотрим гамильтониан задачи. Имеем $N = 2$, а параметры L_{ij}, M_{ij}:

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{\beta}{\omega_1}, & M_{11} &= -\frac{\beta}{\omega_1}, \\ L_{12} &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}, & M_{12} &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}, \\ L_{21} &= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}, & M_{12} &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}, \\ L_{22} &= (\frac{\omega_2}{4} - \frac{\alpha}{\omega_2}), & M_{22} &= (-\frac{\omega_2}{4} - \frac{\alpha}{\omega_2}), \end{aligned}$$

как видно, условия, наложенные на L_{ij}, M_{ij}, выполняются.
Система (8) распадается на две независимых, имеющих в матричной форме вид:

$$\begin{pmatrix} L^*_{11} & L^*_{12} & M^*_{11} & M^*_{21} \\ L^*_{21} & L^*_{22} & M^*_{12} & M^*_{22} \\ -M_{11} & -M_{21} & -L_{11} & -L_{12} \\ -M_{12} & -M_{22} & -L_{21} & -L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}$$

Собственные значения этой матрицы:

$$e^1 = -\sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} \quad e^2 = \sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}}$$

$$e^3 = -\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} \quad e^4 = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}}$$

Соответствующие им значения u, v должны удовлетворять условиям (6). Отсюда следует, что E_1, E_2 могут принимать значения $E_1 \in \{e^1, e^2\}, E_2 \in \{e^3, e^4\}$. Например, для случая $E_1 = e^2, E_2 = e^4$ ненормированные параметры преобразования:

$$u_{11} = -\frac{ik\left(-4\omega_1 E_1 E_2^2 + 4\beta E_2^2 + \omega_1^2\right)}{\Theta_1 \Omega^-}, \qquad u_{12} = \frac{\Omega^- + 2\omega_2}{\Omega^-};$$

$$v_{11} = -\frac{ik\left(-4\beta E_2^2 + \omega_1^2\right)}{\Theta_1 \Omega^-}, \qquad v_{12} = 1;$$

$$u_{21} = \frac{ik\left(4\omega_1 E_2 E_1^2 + 4\beta E_2^1 + \omega_1^2\right)}{\Theta_2 \Omega^+}, \qquad u_{22} = \frac{\Omega^+ + 2\omega_2}{\Omega^+};$$

$$v_{21} = -\frac{ik\left(-4\beta E_1^2 + \omega_1^2\right)}{\Theta_2 \Omega^+}, \qquad v_{22} = 1;$$

$$\Omega^- = \left(\omega_2 - \sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} - \alpha}\right), \qquad \Omega^+ = \left(\omega_2 - \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} - \alpha}\right)$$

$$\Theta_1 = (\omega_1 E_1 - 2\beta), \qquad \Theta_2 = (\omega_1 E_2 - 2\beta), \qquad k = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

4 Проверка на уравнениях движения

Уравнения движения для лагранжиана (1) имеют вид:

$$\ddddot{q} - \alpha\ddot{q} + \beta q = 0.$$

Подставим в это уравнение $q = q_0 e^{-iEt}$ и получим

$$E^4 + \alpha E^2 + \beta = 0.$$

Получаем

$$E^2 = \frac{1}{2}(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}), \qquad \alpha < 0, \quad 4\beta < \alpha^2$$

Что соответствует энергиям возбуждений, полученных при квантовании.

5 Вывод

На примере лагражиана (1) было рассмотрено каноническое квантование теорий, содержащих старшие производные. Показано, что при наличии производных N-го порядка, квантовая теория имеет N различных видов возбуждений. Получены конкретные значения энергий возбуждения для лагранжиана (1).

6 Приложение

Существует альтернативный способ построения гамильтониана.
Рассмотрим лагражиан задачи

$$L = \ddot{q}^2 + \alpha\dot{q}^2 + \beta q^2,$$

его уравнения движения имеют вид:

$$\ddddot{q} - \alpha\ddot{q} + \beta q = 0.$$

Теперь построим новый лагранжиан:

$$L = \alpha\dot{q}^2 + \beta q^2 + \mu x^2 + \nu x\ddot{q}$$

Новые уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu x + \nu\ddot{q} = 0 \\ 2\beta q - 2\alpha\ddot{q} + \nu\ddot{x} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Можно найти такие μ, ν, чтобы из новых уравнений движения следовало изначальное. Тогда новый лагражиан:

$$L = \alpha\dot{q}^2 + \beta q^2 - x^2 + 2x\ddot{q}.$$

Добавим к нему полную производную по времени и получим:

$$\hat{L} = \alpha\dot{q}^2 + \beta q^2 - x^2 - 2\dot{x}\dot{q}.$$

Теперь из него можно построить гамильтониан:

$$\hat{H} = p_q\dot{q} + p_x\dot{x} - \hat{L} = \frac{1}{2}p_xp_q - \frac{\alpha}{4}p_x^2 - \beta q^2 + x^2,$$

где p_q, p_x - импульсы, сопряженные соотвествующим координатам. Этот гамильтониан переходит в построенный ранее

$$H = p^1q_2 + \frac{1}{4}(p^2)^2 - \alpha q_2^2 - \beta q_1^2$$

при каноническом преобразовании:

$$p_x = 2q_2, \quad x = \frac{1}{2}p^2, \quad q = q_1, \quad p_q = p^1.$$

Список литературы

[1] Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика с задачами.

[2] Д. М. Гитман, И. В. Тютин. Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986, 216 с.

[3] Давыдов А.С. Квантовая механика (2-е изд.). М.: Наука, 1973 М.: Наука, 1976