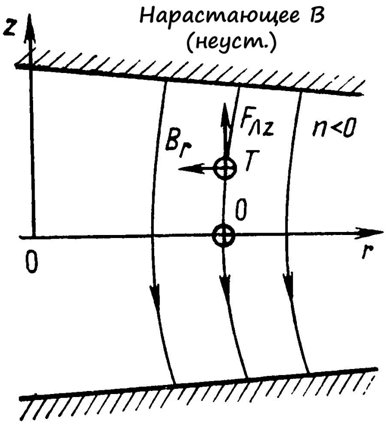
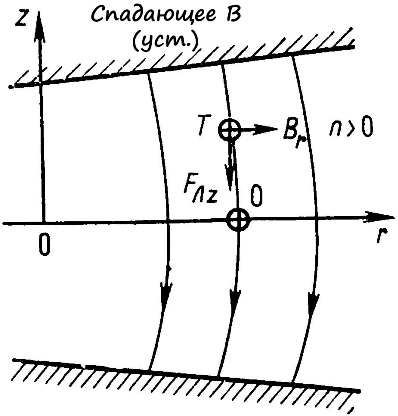
Фокусировка в ускорителях

Проблема поперечной устойчивости

Однородное магнитное поле $\overrightarrow{B}||Oz$.

- Аксиальная устойчивость.
- Радиальная устойчивость.





Бетатронные колебания

Устойчивость вдоль направлений z и r выполняется одновременно, когда поле B_z спадает по радиусу, но не быстрее чем $1/r$.

$$F_r = \frac{mv^2}{r} - evB_z(r) \approx \frac{mv^2}{R_0} - evB_0 - \frac{mv^2}{R_0^2}(r - R_0) - ev\frac{\partial B_z}{\partial r}(r - R_0) =$$
$$= -\frac{mv^2}{R_0^2}\left(1 + \frac{eR_0^2}{mv}\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)(r - R_0) \quad (1)$$

Показатель спада поля

$$n = -\frac{R_0}{B_0}\frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (2)$$

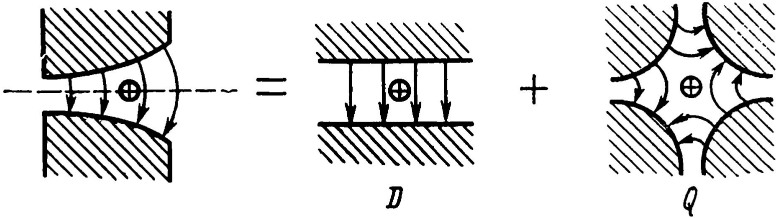
Аналогично,

$$F_z = -\frac{mv^2}{R_0}nz. \quad (3)$$

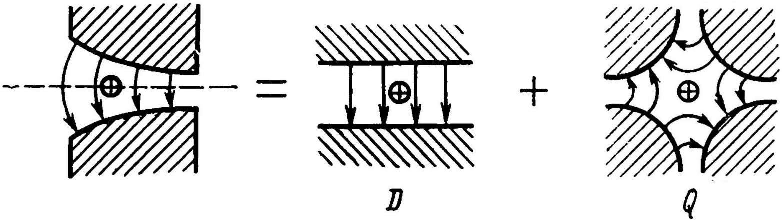
Условие устойчивости

$$\nu_r = \sqrt{1-n},\ \nu_z = \sqrt{n}\ \Rightarrow\ 1 > n > 0 \quad (4)$$

Принцип сильной фокусировки

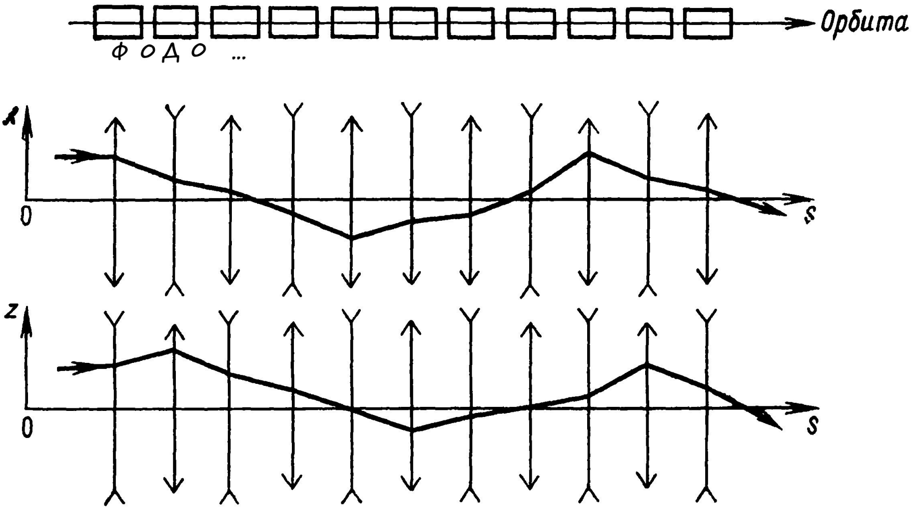


фокусировка в z-направлении, дефокусировка в r-направлении, $n > 0$



дефокусировка в z-направлении, фокусировка в r-направлении, $n < 0$

ФОДО-структура



S-матрица и теория рассеяния

Оператор эволюции

Уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \tag{5}$$

Представление Гейзенберга

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi\rangle, \; i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t). \tag{6}$$

Асимптотические состояния

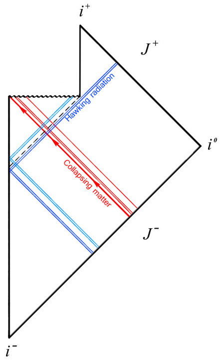
$$|f\rangle = \lim_{t\to+\infty}\hat{U}(t)|\Psi\rangle, \; |i\rangle = \lim_{t\to-\infty}\hat{U}(t)|\Psi\rangle \tag{7}$$

Символически,

$$|f\rangle = \hat{S}|i\rangle. \tag{8}$$

Задача рассеяния: найти амплитуду перехода из начального асимптотического состояния в конечное.

Функциональный интеграл



$$[\hat{a}_k, \hat{a}_q^\dagger] = \delta(k-q), \;\; \hat{a}_k|\alpha\rangle = \alpha_k|\alpha\rangle \tag{9}$$

Волновой функционал поля

$$\langle f|\alpha\rangle = exp\Big(-\frac{1}{2}\int dk\alpha(k)\alpha(-k) - -\frac{1}{2}\int dk\omega_k f(k)f(-k) + \int dk\sqrt{2\omega_k}\alpha(k)f(k)\Big) \tag{10}$$

Условие полноты

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha^*(k)\mathcal{D}\alpha(k) exp\Big(-\int dk\alpha(k)\alpha^*(k)\Big)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{11}$$

Функционал для S-матрицы

$$\langle\beta|S|\alpha\rangle = \lim_{t_f\to+\infty}\lim_{t_i\to-\infty}\int \mathcal{D}f_f\mathcal{D}f_i\mathcal{D}f\mathcal{D}\phi\mathcal{D}g_{\mu\nu}\, exp\Big(i\mathcal{S}_{grav}+i\int dt\mathcal{L}[f]+B_i(f_i,\alpha)+B_f(f_f,\beta^*)\Big) \tag{12}$$

где

$$B_i(f_i,\alpha) = -\frac{1}{2}\int dk\alpha(k)\alpha(-k)e^{-2i\omega_k t_i} - \frac{1}{2}\int dk\omega_k f_i(k)f_i(-k)+ \\ + \int dk\sqrt{2\omega_k}e^{-i\omega_k t_i}\alpha(k)f_i(k), \tag{13}$$

$$B_f(f_f,\beta^*) = -\frac{1}{2}\int dk\beta^*(k)\beta^*(-k)e^{2i\omega_k t_f} - \frac{1}{2}\int dk\omega_k f_f(k)f_f(-k)+ \\ + \int dk\sqrt{2\omega_k}e^{i\omega_k t_f}\beta^*(k)f_f(-k). \tag{14}$$

- граничные члены.

Функционал для S-матрицы

Седловая точка функционального интеграла дается уравнениями

$$\omega_k f_i(k) + i\dot{f}_i(k) = \sqrt{2\omega_k} e^{-i\omega_k t_i} \alpha(-k), \tag{15}$$

$$\omega_k f_f(k) - i\dot{f}_f(k) = \sqrt{2\omega_k} e^{i\omega_k t_f} \beta^*(k), \tag{16}$$

Подставляя в них разложение начальных и конечных состояний по частотностям

$$f(k) = f^+(k)e^{-i\omega_k t} + f^-(k)e^{i\omega_k t}, \tag{17}$$

, получаем соотношения

$$f_i^+(k) = \frac{\alpha(-k)}{\sqrt{2\omega_k}}, \ f_f^-(k) = \frac{\beta^*(k)}{\sqrt{2\omega_k}}. \tag{18}$$

Таким образом, мы получаем выражение для полного граничного члена, определяемого начальным и конечным состоянием поля.

$$\mathcal{B}[f] = \int dk \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \Big(\alpha(k) f_i^-(k) + \beta(k) f_f^+(k) \Big). \tag{19}$$

Двумерная гравитация на пространстве с границей

Сферическая редукция и 1+1-мерное действие

Действие Эйнштейна-Гилберта

$$S_{EH} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^2x \sqrt{-g} R \tag{20}$$

дает тривиальные уравнения в двумерии

$$G_{\mu\nu} \equiv 0. \tag{21}$$

Вводим сферически-симметричную 1+3 метрику

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{e^{-2\phi}}{\lambda^2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{22}$$

где ϕ - поле дилатона, получаем 1+1-мерную редуцированную теорию

$$S_{EH} = \frac{2\pi M_{Pl}^2}{\lambda^2} \int d^2x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(R + 2(\nabla\phi)^2 + 2\lambda^2 e^{2\phi}\right), \tag{23}$$

Решение Шварцшильда

$$\phi = -\ln(\lambda r),\ ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dt)^2 + \frac{(dr)^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}. \tag{24}$$

Модель CGHS

$$S_{CGHS} = \int d^2x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left(R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2\right) - \frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{-g}(\nabla f)^2. \quad (25)$$

Конформно-плоская метрика: $g_{\mu\nu} = e^{2\rho}\eta_{\mu\nu}$
Квази-крускаловские координаты: $\tilde{v} = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda(t+r)}$, $\tilde{u} = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(t-r)}$

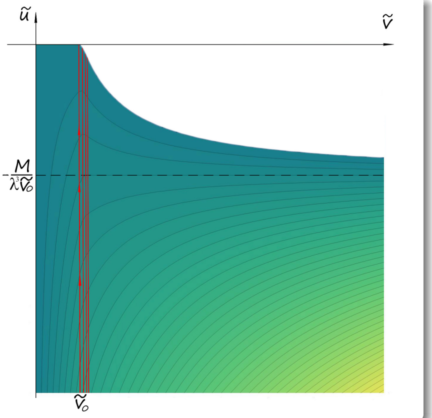
Система уравнений на дилатон

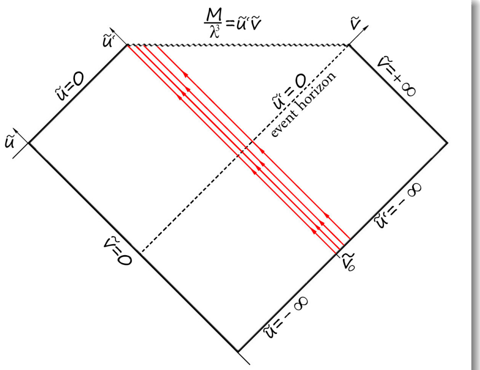
$$(e^{-2\phi})_{\tilde{v}\tilde{u}} + \lambda^2 = 0,\ (e^{-2\phi})_{\tilde{v}\tilde{v}} = -\frac{1}{2}f_{\tilde{v}}^2,\ (e^{-2\phi})_{\tilde{u}\tilde{u}} = -\frac{1}{2}f_{\tilde{u}}^2 \quad (26)$$

Общее решение

$$e^{-2\phi} = -\lambda^2\tilde{v}\tilde{u} + g(\tilde{v}) + h(\tilde{u}), \quad (27)$$

Решение с коллапсом





$$u' = u + \frac{E}{\lambda^3 v_0}.$$

Действие для пространства с границей

$$S_{CGHS\phi_0} = \int_{\phi<\phi_0} d^2x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left(R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\phi<\phi_0} d^2x\sqrt{-g}(\nabla f)^2 + 2\oint_{\phi=\phi_0} d\sigma\sqrt{|h|}e^{-2\phi}\left(K + 2\lambda\right), \qquad (28)$$

где

$$K = h^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu \qquad (29)$$

- внешняя кривизна границы $\phi = \phi_0$ с индуцированной метрикой

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \qquad (30)$$

Условия Неймана на границе $\phi = \phi_0$

$$\nabla_n f = 0,\ \nabla_n\phi = \lambda. \qquad (31)$$

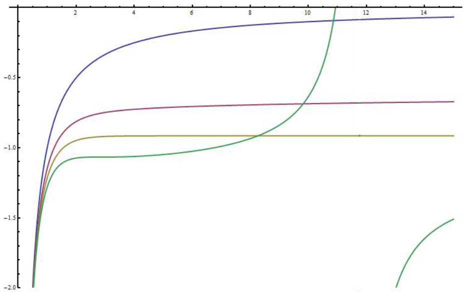
Модель CGHSϕ_0

Движение стенки

Граничные условия дают уравнение

$$\tilde{U}_{\tilde{v}} = \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda^2}(g_{\tilde{v}} - \lambda^2 \tilde{U})^2. \qquad (32)$$

Его решения для различных энергий демонстрируют наличие двух режимов



Минимальная масса черной дыры:

$$M = \lambda e^{-2\phi_0}$$

Модель CGHSϕ_0

Движение стенки