

Практическое применение статистической регуляризации Турчина

Мария Полякова

Научный руководитель Нозик А.А.

Введение: Некорректные обратные задачи

Уравнение Фредгольма I-го рода:

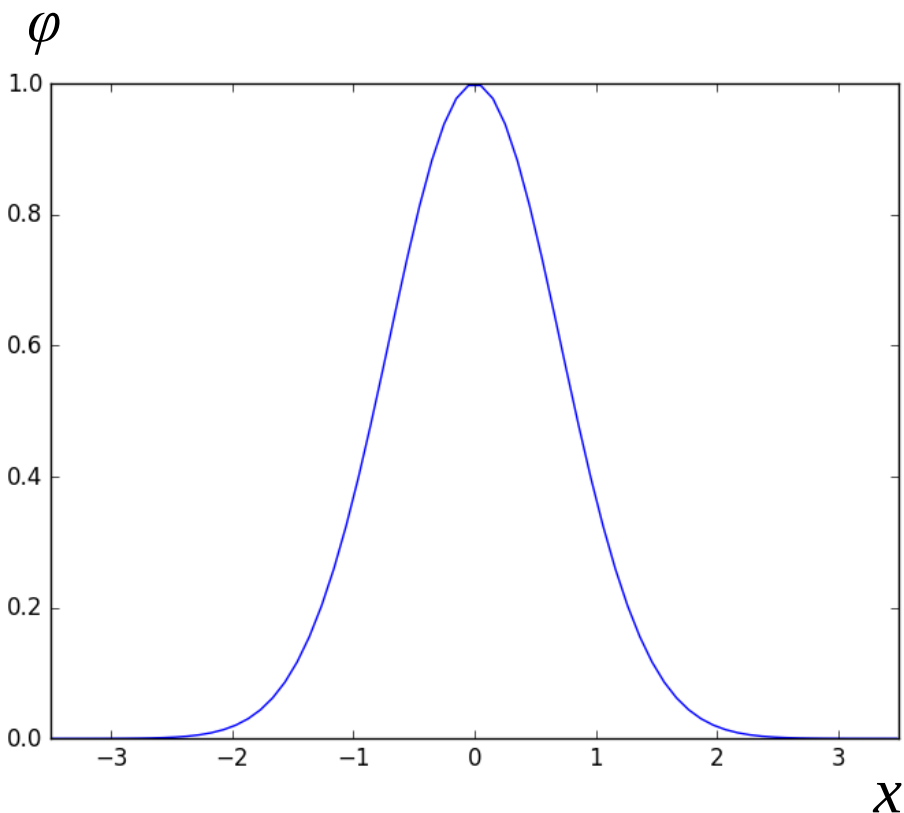
$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

Задача: по известной функции f и ядру K найти функцию φ .

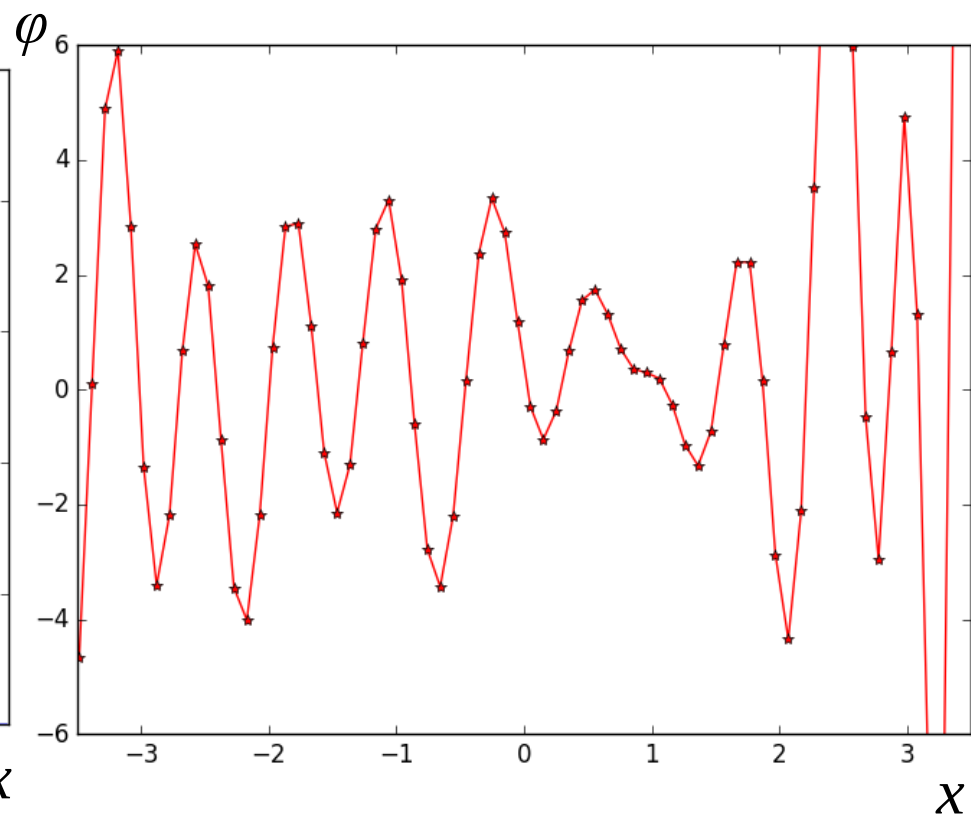
Задача некорректна: стохастичность измерений f искажает точное решение задачи

Следствие: неустойчивость решения

Некорректные обратные задачи



Что должно получиться



Что получается стандартным
методом (МНК)

Статистический метод: регуляризация Турчина

Стратегия

$$\widehat{\vec{\varphi}} = S(N, M, \vec{f}, \vec{\sigma}) - \text{стратегия} \quad U = \sum_n \mu_n (\varphi_n - \widehat{\varphi}_n)^2 - \text{потеря полезности}$$

Байесова стратегия - стратегия минимума средней потери полезности по апостериорной плотности вероятности.

$$P(\vec{\varphi}|\vec{f}) = \frac{P(\vec{f}|\vec{\varphi})P(\vec{\varphi})}{\int P(\vec{f}|\vec{\varphi})P(\vec{\varphi})d\varphi} \quad - \text{апостериорная вероятность по теореме Байеса}$$

$$\widehat{\vec{\varphi}} = \int \vec{\varphi} P(\vec{\varphi}|\vec{f})d\vec{\varphi} \quad - \text{наилучшее решение как среднее по апостериорной вероятности}$$

Априорная вероятность

В качестве априорной информации возьмем гладкость функции:

$$\Omega = \int \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad \Omega[\varphi] = \left(\vec{\varphi}, \hat{\Omega} \vec{\varphi} \right)$$

Потребуем минимума внесенной априорной информации, используя определение информации по Шеннону:

$$I[P(\vec{\varphi})] = \int \ln P(\vec{\varphi}) P(\vec{\varphi}) d\vec{\varphi} \rightarrow \min$$

Необходимые условия на $P(\varphi)$:

- $\int \left(\vec{\varphi}, \hat{\Omega} \vec{\varphi} \right) P(\vec{\varphi}) d\vec{\varphi} = \omega$
- $\int P(\vec{\varphi}) d\vec{\varphi} = 1$

Априорная вероятность

$$\rightarrow P(\vec{\varphi}) = C_1 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(\vec{\varphi}, \Omega \vec{\varphi})\right)$$

$$\rightarrow P_{\alpha}(\vec{\varphi}) = \frac{\alpha^{\frac{N}{2}} \sqrt{\det \Omega}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{\varphi}, \alpha \Omega \vec{\varphi})\right)$$

$$\rightarrow \boxed{P(\vec{\varphi}) = \int P(\alpha) P(\vec{\varphi} | \alpha) d\alpha} \quad P(\alpha) = \text{const}, \alpha > 0$$

Неопределенность α не влечет предположения $P(\varphi) = \text{const}$, так как это бы означало отсутствие корреляций у соседних компонент, что противоречит гладкости функции. Таким образом, значение α определяет глубину этих корреляций (гладкость)

Апостериорная плотность вероятности

$$P(\vec{\varphi}|\vec{f}) = \frac{\int d\alpha P(\alpha) P_{\alpha}(\vec{\varphi}) P(\vec{f}|\vec{\varphi})}{\int d\alpha P(\alpha) \int d\vec{\varphi} P_{\alpha}(\vec{\varphi}) P(\vec{f}|\vec{\varphi})}$$

$$P(f|\alpha) = \int P_{\alpha}(\varphi) P(f|\varphi) d\varphi$$

$$P(\alpha|\vec{f}) = \frac{P(\alpha) P(\vec{f}|\alpha)}{\int P(\alpha) P(\vec{f}|\alpha) d\alpha}$$

Производится усреднение по всем возможным значениям α

Случай гауссовых шумов

Пусть вектор измерений f имеет ошибки, описываемые многомерным гауссовым распределением с ковариационной матрицей Σ . Тогда:

$$P(\vec{f} | \vec{\varphi}) = c_1 \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{\varphi}, B\vec{\varphi}) + \vec{b}\vec{\varphi}\right) \quad \begin{aligned} b^T &= \vec{f}^T \Sigma^{-1} K \\ B &= K^T \Sigma^{-1} K \end{aligned}$$

Решение и его ошибка, при фиксированном α :

$$\hat{\varphi}_\alpha = (B + \alpha\Omega)^{-1} \vec{b} \quad s_{\hat{\varphi}_\alpha} = (B + \alpha\Omega)^{-1}_{nn}$$

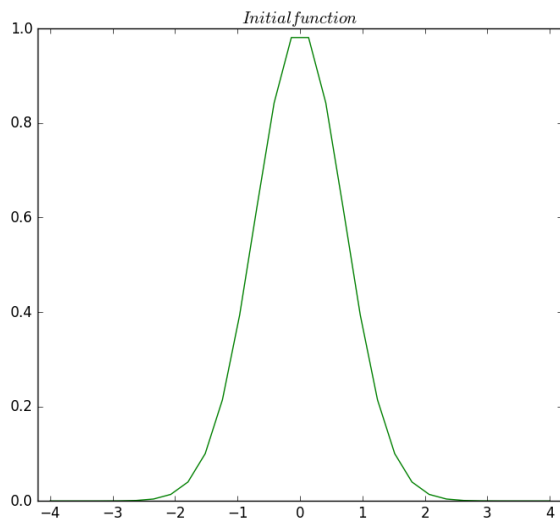
Если апостериорная плотность вероятности $P(\alpha|f)$ содержит достаточно информации для существования наиболее вероятного α , тогда находим α из условия:

$$\frac{dP(\alpha | f)}{d\alpha} = 0$$

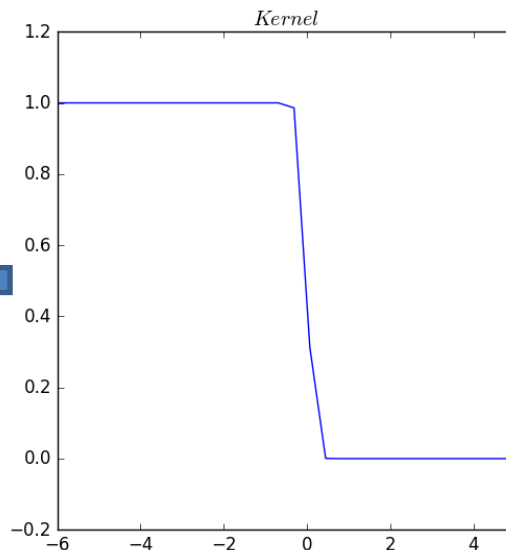
и находим φ при таком значении α , что будет являться хорошим приближением усреднения.

Реализация

Исходная функция



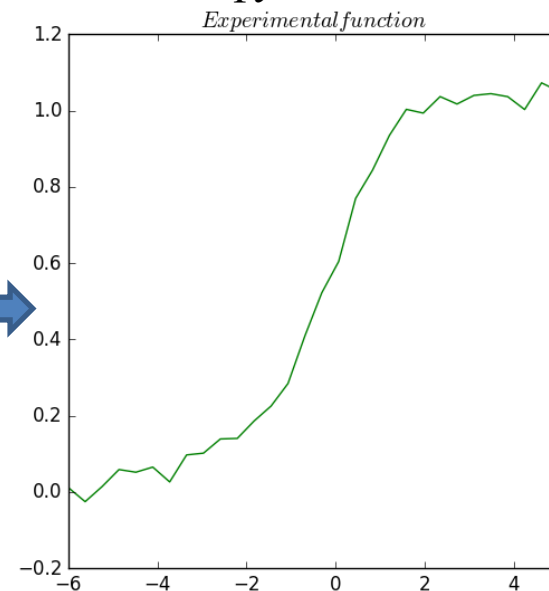
Ядро



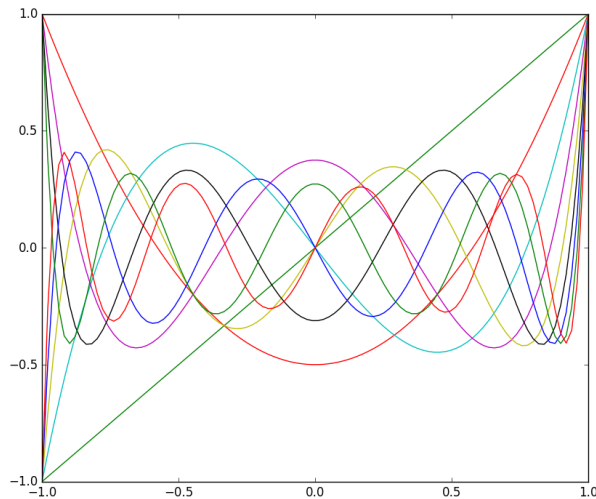
Случайная погрешность 1%



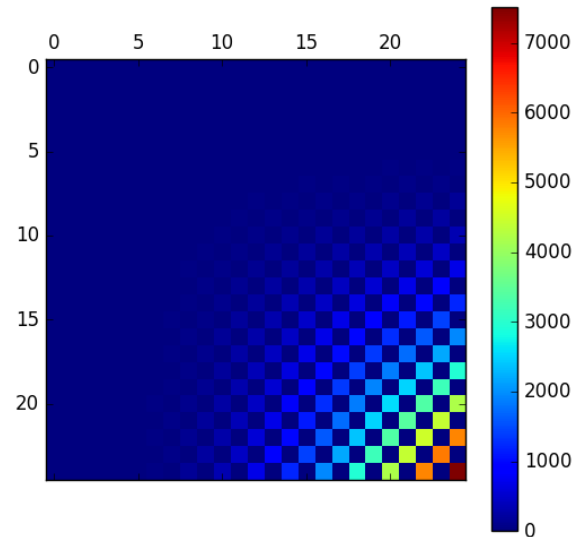
Экспериментальная функция



Базис



Базисные функции
(полиномы Лежандра)



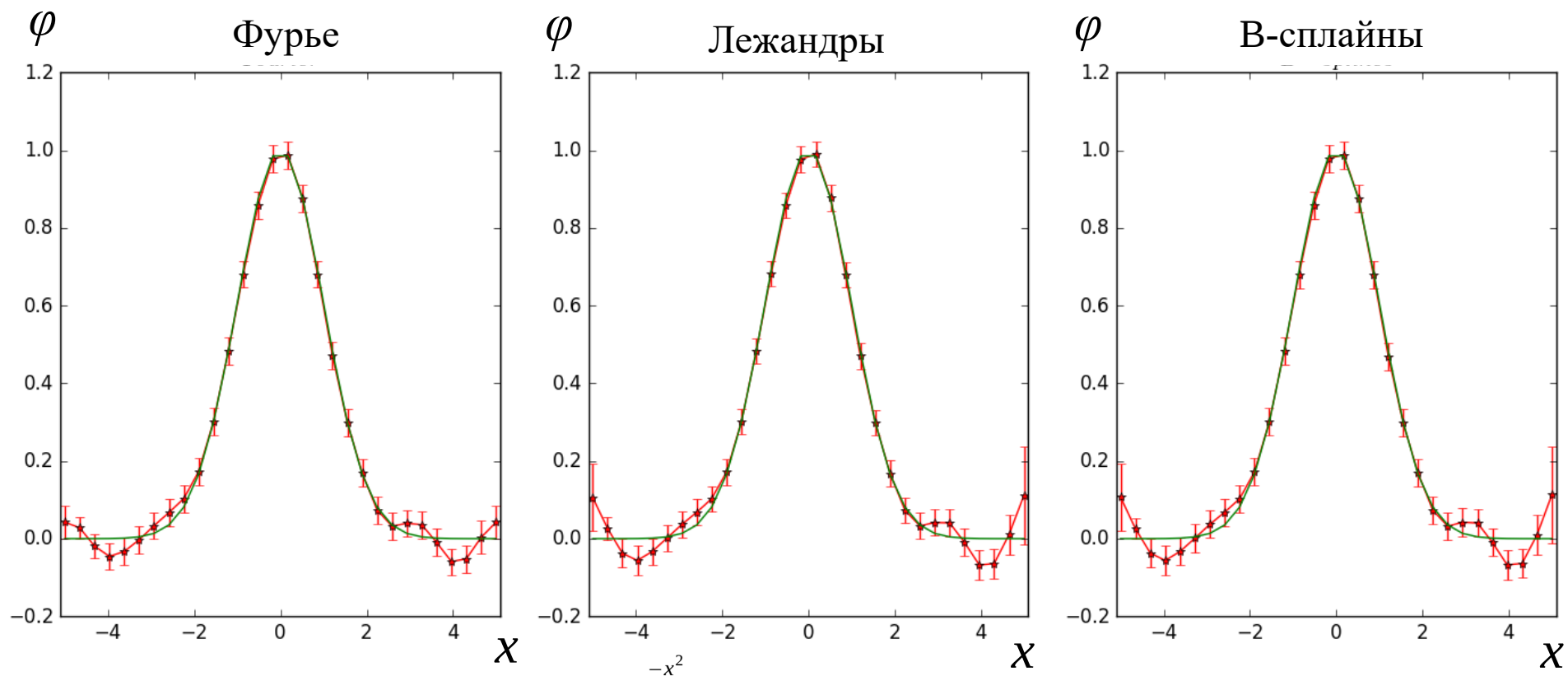
Матрица Ω

$$f_m = K_{mn} \varphi_n \quad a_m = \frac{1}{2} (2m+1) \int_{-1}^1 \varphi(\mu) P_m(\mu) d\mu$$

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

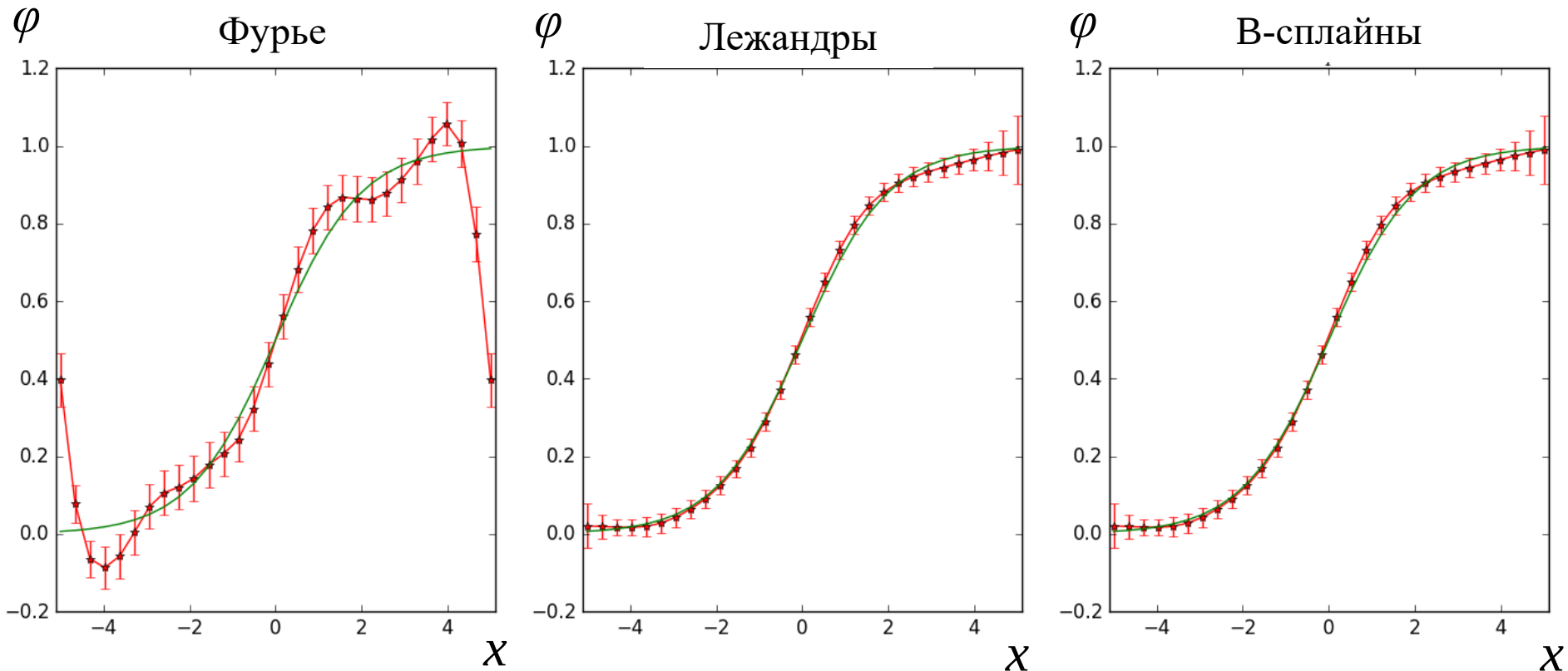
Производится алгебраизация уравнений по базисам полиномов Лежандра, Фурье и В-сплайнам.

Результат регуляризации при различных базисах



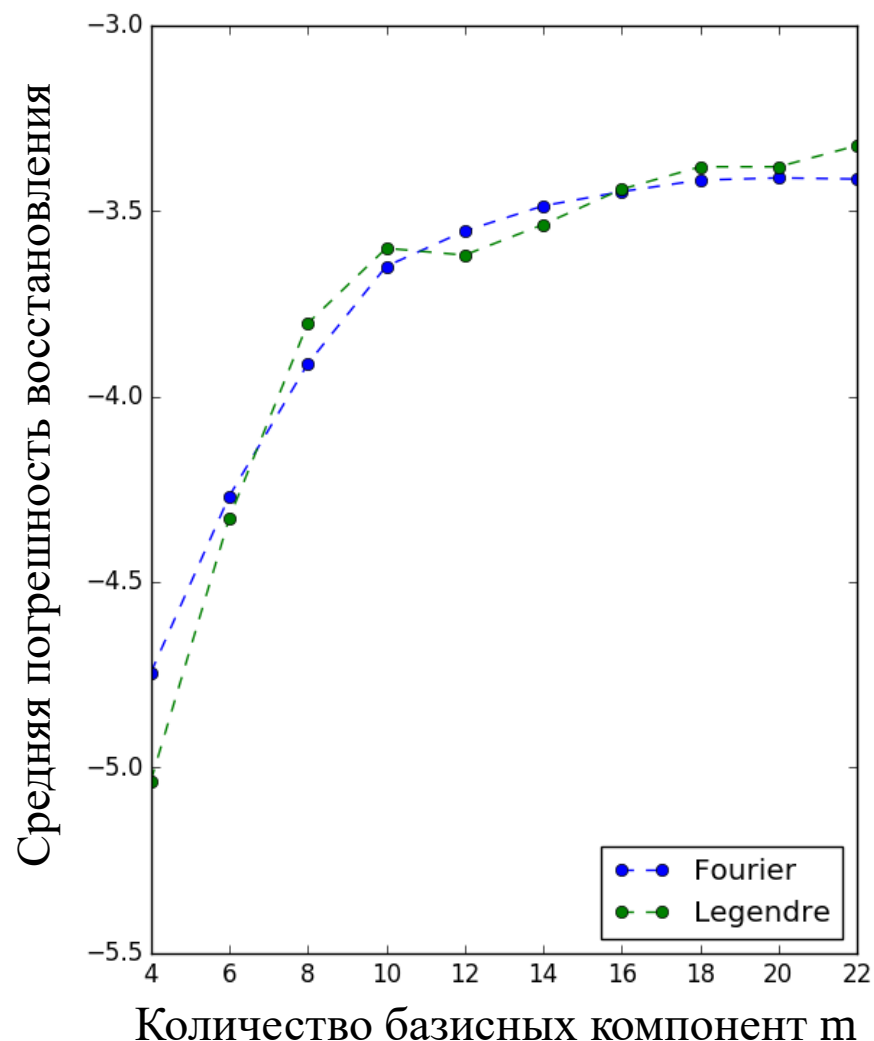
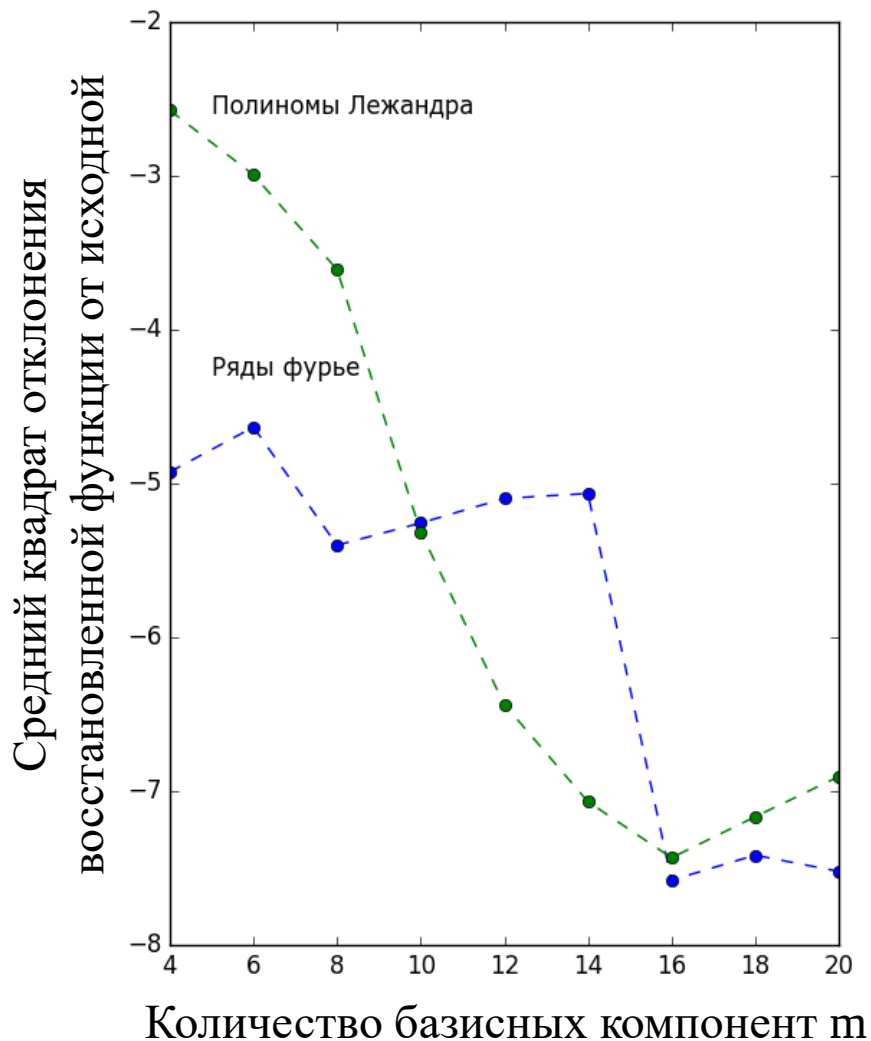
Восстановление функции $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ в трех базисах, погрешность 1% , 30 компонент, 30 узлов. Зеленая линия - исходная функция, красная линия с точками - результат регуляризации.

Различные базисы

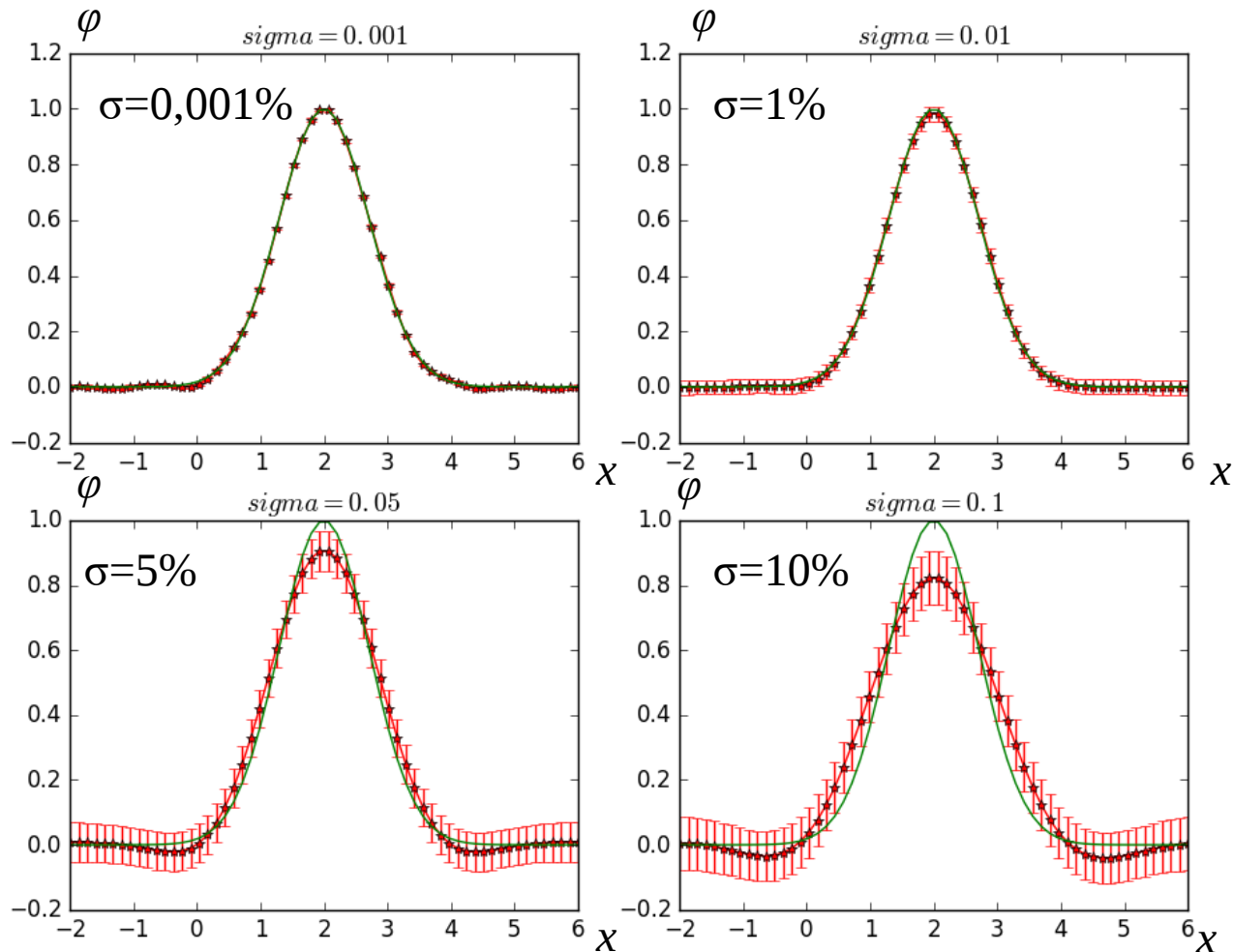


Восстановление функции $\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ в трех базисах, погрешность 1% , 30 компонент, 30 узлов. Зеленая линия - исходная функция, красная линия с точками -результат регуляризации.

Количество базисных функций

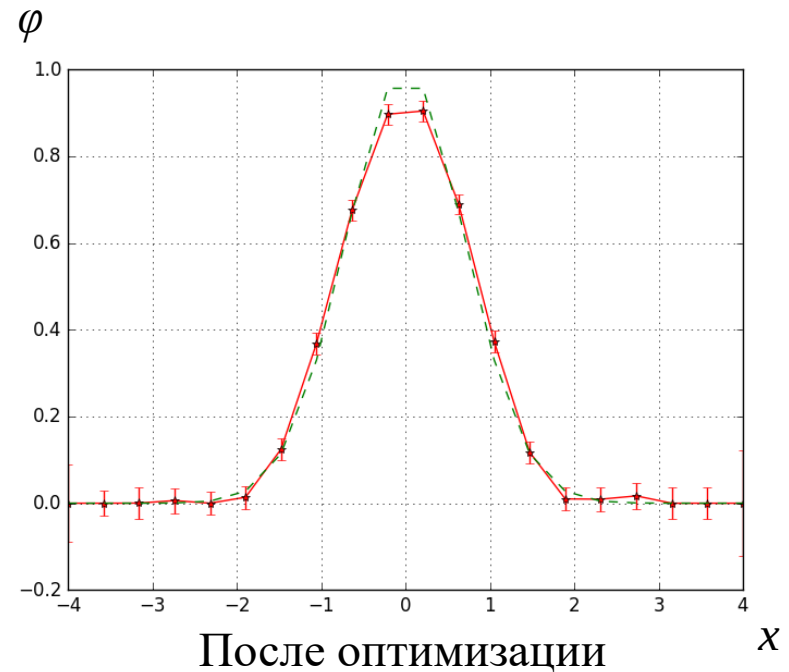
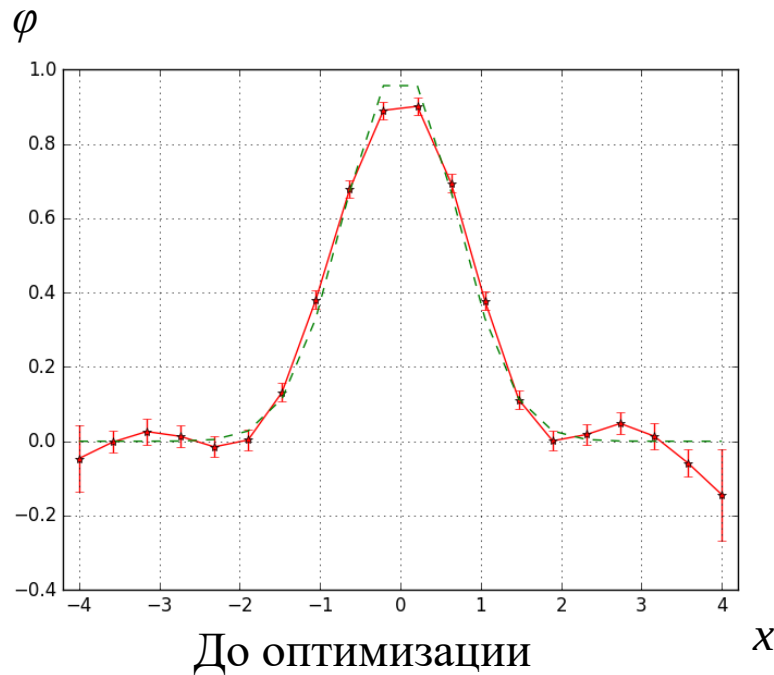


Влияние погрешностей измерения на результат регуляризации

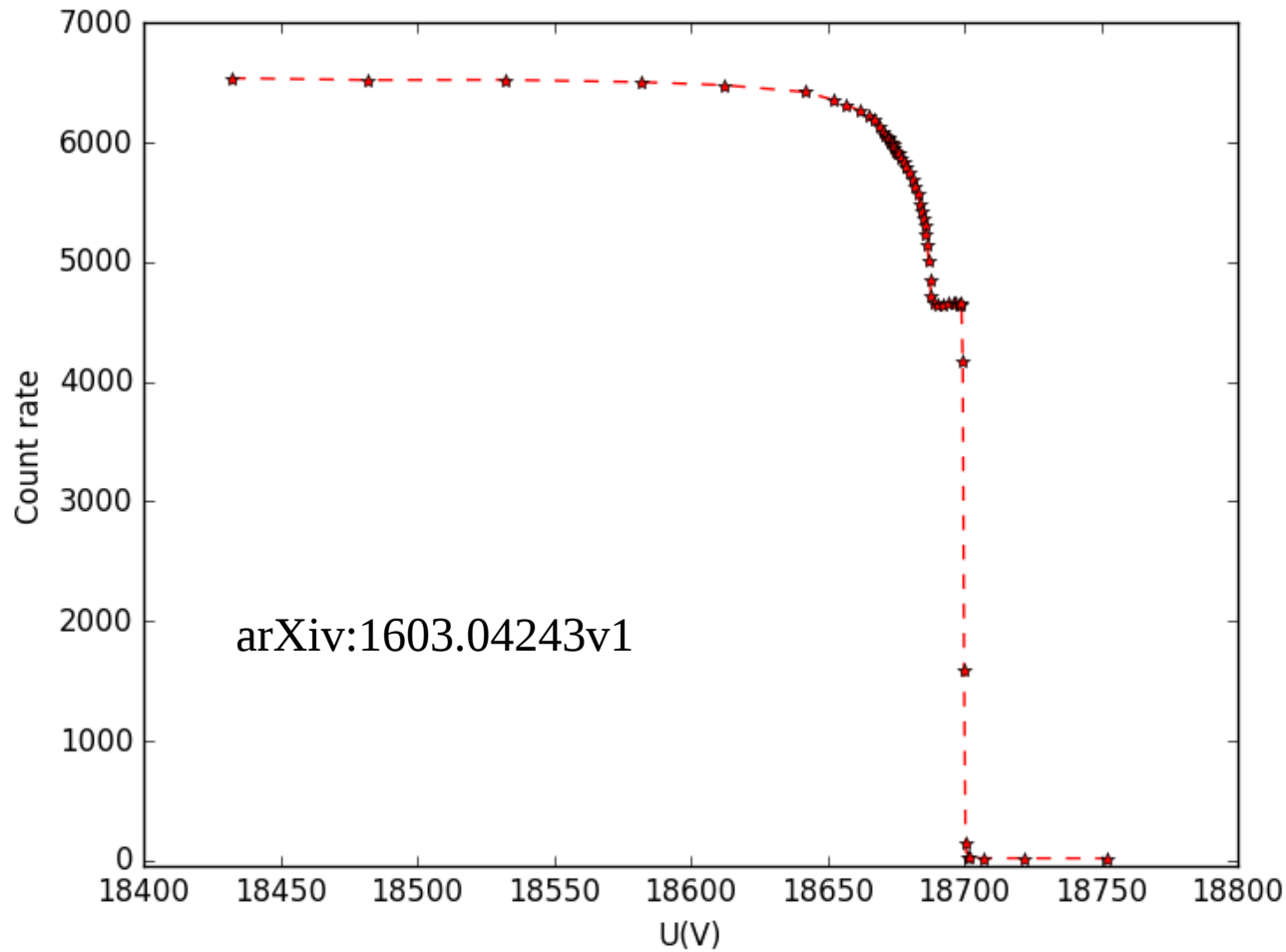


Введение дополнительной априорной информации

$$P'(\vec{\varphi} | \vec{f}) \sim \zeta(\vec{\varphi}) P(\vec{\varphi} | \vec{f}), \text{ где } \zeta(\vec{\varphi}) = 0 \text{ при } F_i(\vec{\varphi}) < 0 \quad \forall i$$

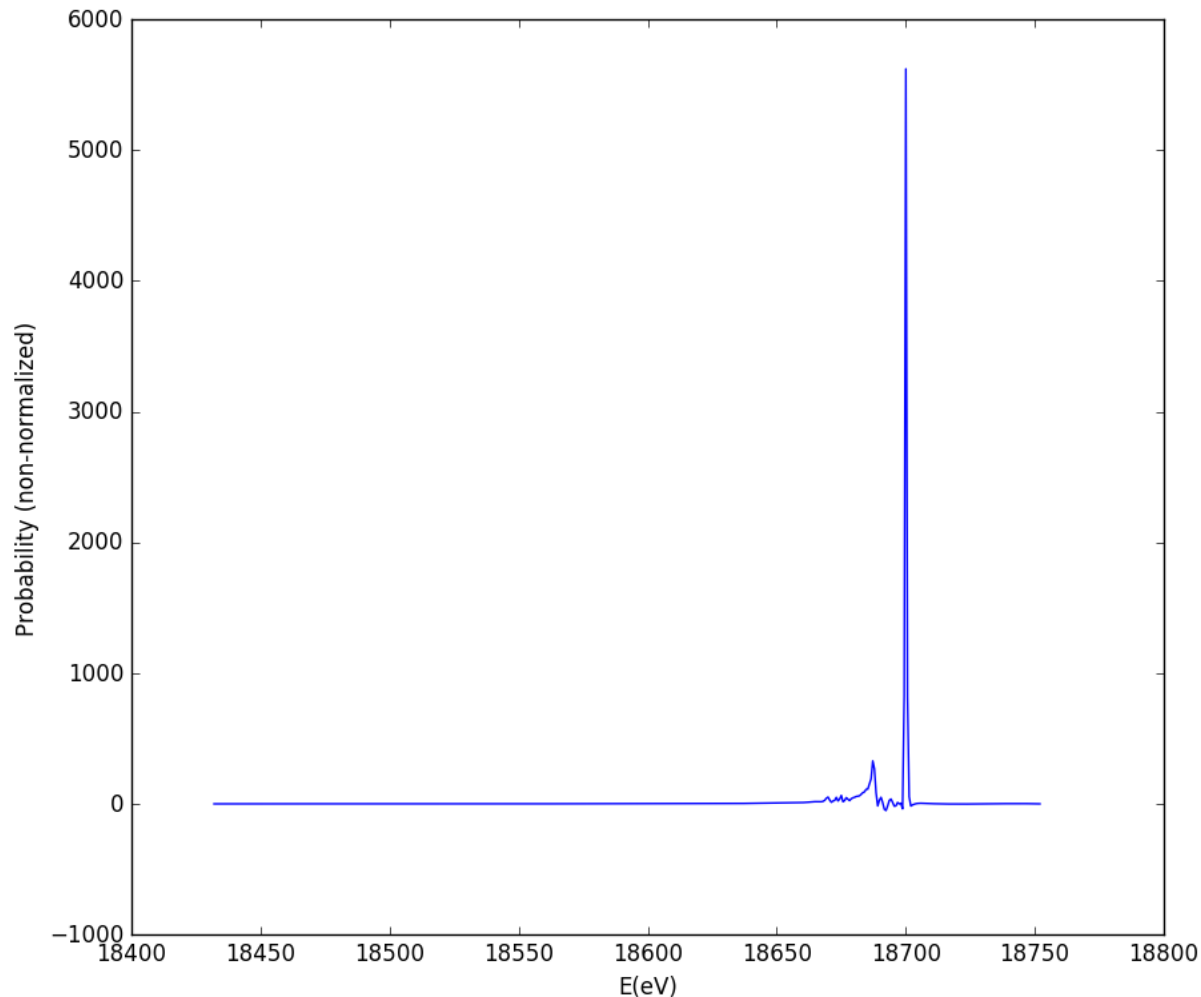


Обработка данных калибровочных измерений эксперимента Троицк нью-масс



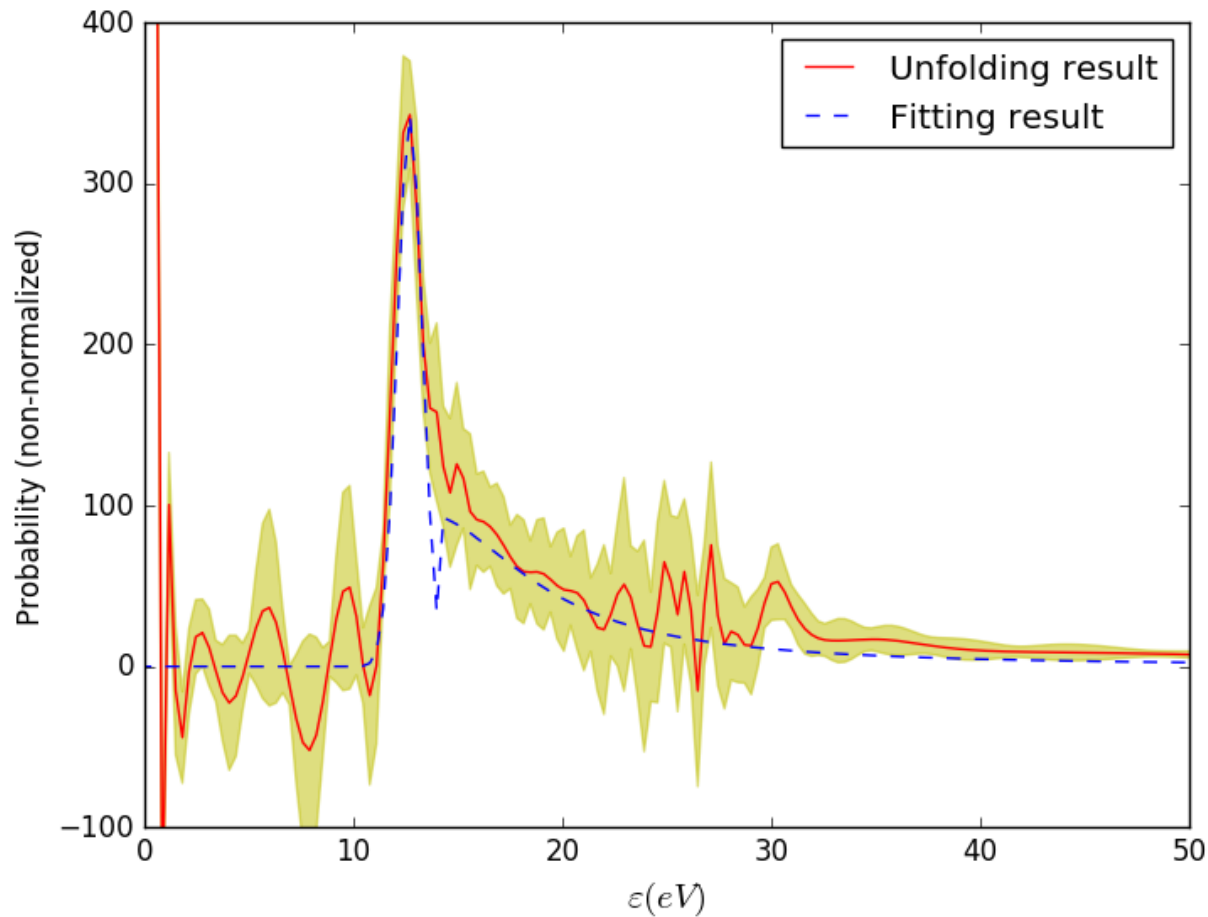
Экспериментальные данные – спектр рассеяния электронов при начальной энергии электронов 18700 eV

Обработка данных калибровочных измерений эксперимента Троицк ню-масс



Результат обработки данных эксперимента

Обработка данных калибровочных измерений эксперимента Троицк ню-масс



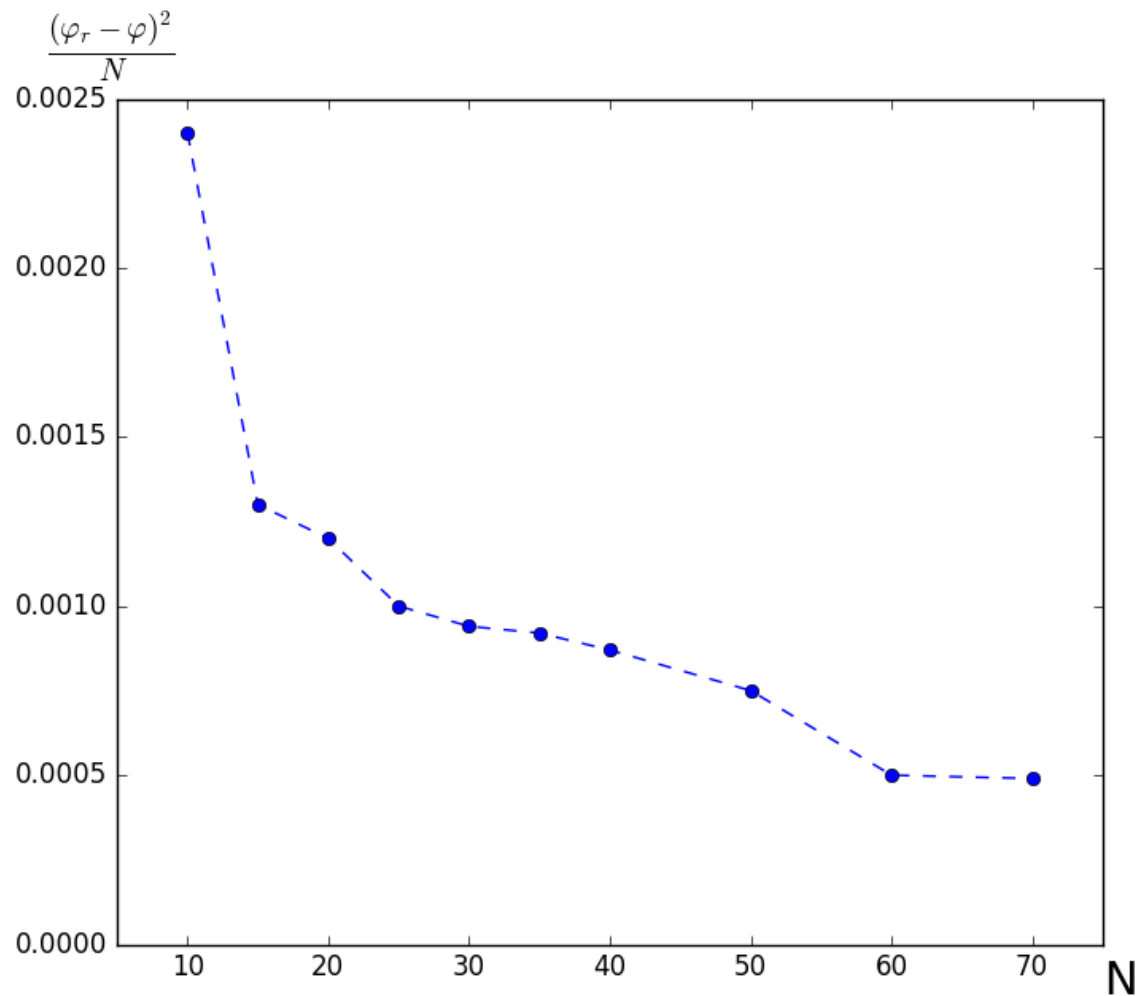
$$\varepsilon = E - U$$

Результат обработки данных эксперимента Троицк ню-масс (красная линия) и результат фитирования (пунктирная линия), область однократного рассеяния

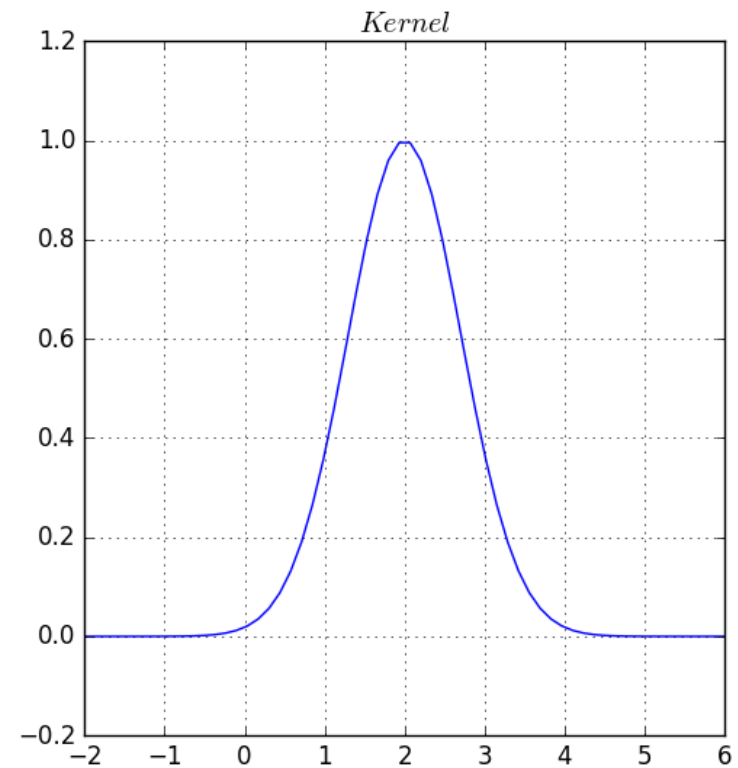
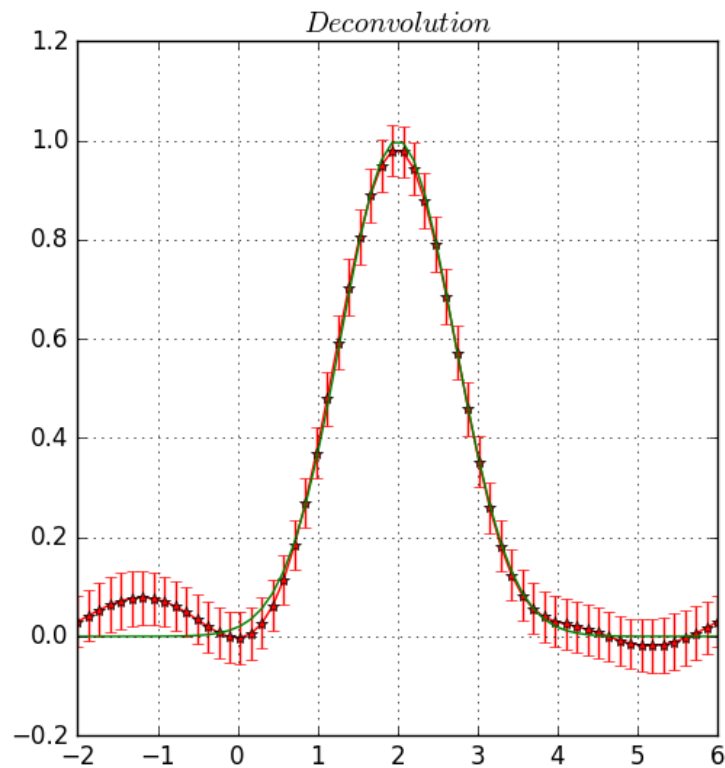
Заключение

- Был реализован и исследован метод статистической регуляризации Турчина, с использованием трех различных методов алгебраизации.
- Преимущества статистического метода регуляризации – существование аналитического нахождения параметра регуляризации и погрешности решения
- Результат регуляризации зависит от способа алгебраизации и параметров выбранного базиса. Для каждой задачи возможно подобрать подходящий базис и оптимальные базисные параметры
- Данный метод дает возможности введения дополнительной априорной информации
- Метод был применен к обработке калибровочных данных эксперимента Троицк ню-масс и результат отлично согласуется с результатами фитирования
- Готовиться публикация статьи по результатам проделанной работы

Количество узлов сетки

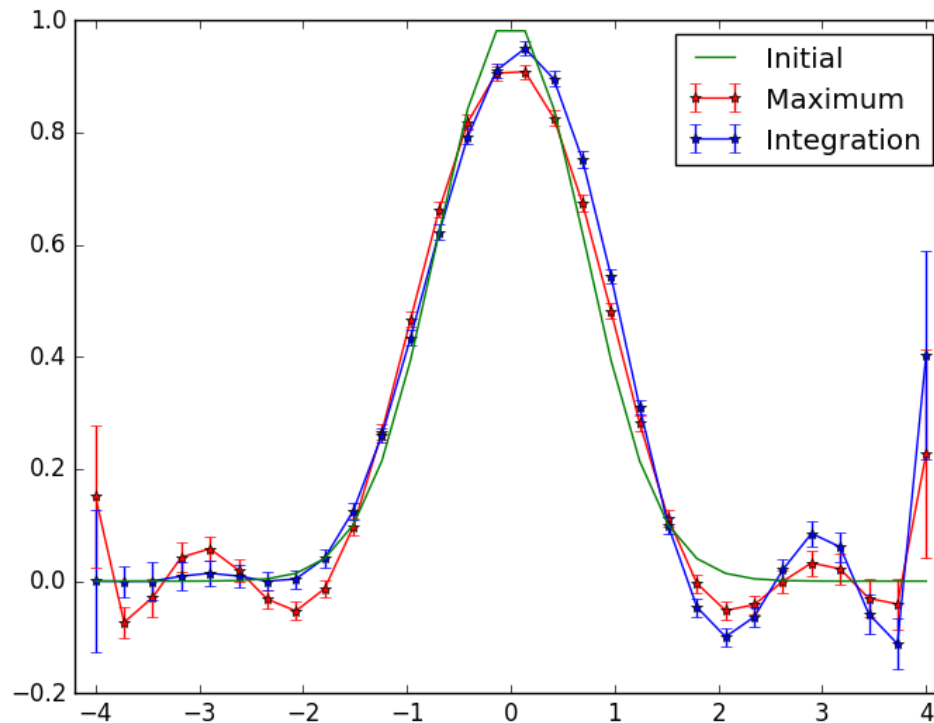


Неинтегральное ядро



Случай неинтегрального ядра восстанавливается успешно

Выбор параметра регуляризации



$$P(\vec{\varphi}) = \int P(\alpha) P(\vec{\varphi} | \alpha) d\alpha$$

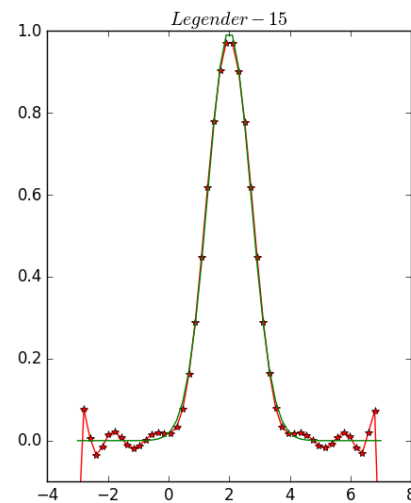
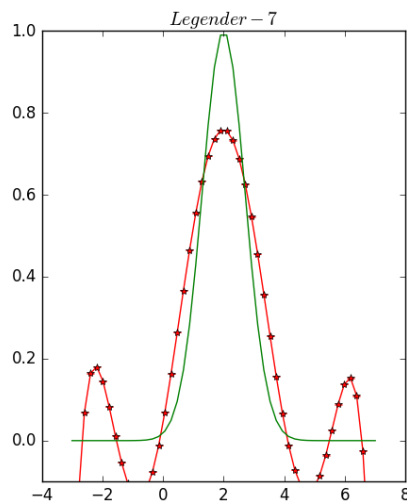
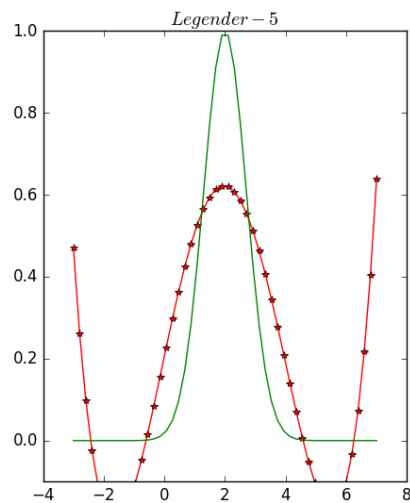
Интегрирование

VS

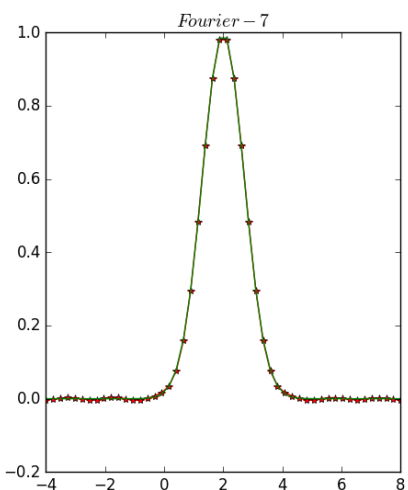
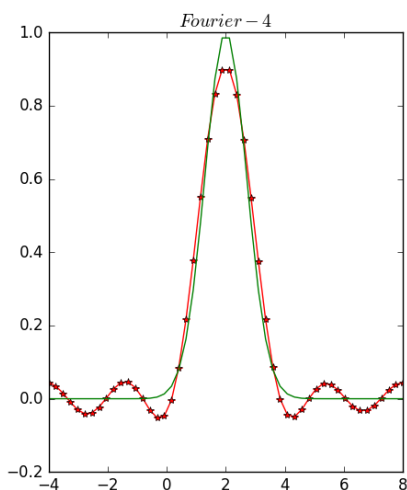
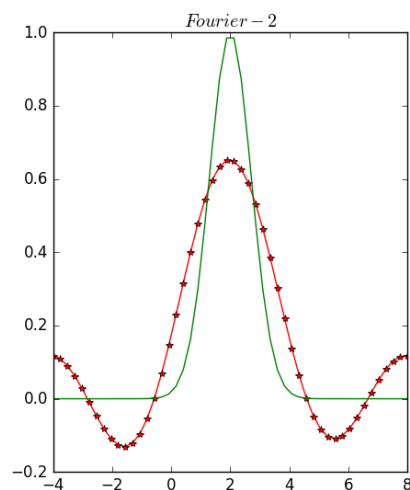
$$\frac{dP(\alpha | f)}{d\alpha} = 0$$

Нахождение максимума

Количество базисных функций



Базис полиномов
Лежандра (5, 7 и 15
базисных функций)



Базис Фурье (4, 8 и
14 базисных
функций)

Зеленая линия - исходная функция, красная линия с точками - результат регуляризации.

Выбор параметра регуляризации

