

Дираковский массивный фермион во внешнем поле Q-шара в нерелятивистском приближении

К. С. Давыдов¹

¹Факультет проблем физики и энергетики
Московский физико-технический институт

5 июля 2018 г.

- Построение Q-шаров
- Взаимодействие массивных фермионов с полем Q-шара
- Переход к нерелятивистскому пределу и преобразование Фолди-Ваутхайзена

Построение Q-шаров

Лагранжиан теории скалярного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - V(|\phi|^2).$$

Решение уравнения движения будем искать в виде

$$\phi(x) = \rho(r) e^{i\omega t}.$$

Условие существования Q-шаров:

$$\omega_0^2 \equiv \min \frac{V(|\phi|^2)}{|\phi|^2} < \left. \frac{V(|\phi|^2)}{|\phi|^2} \right|_{\phi=0} \equiv M_\phi^2,$$

введём величину

$$\rho_0 = \arg \min_{\rho} \frac{V(\rho^2)}{\rho^2}.$$

Соотношение для частоты Q-шара:

$$\omega = \frac{dE_Q/d\omega}{dQ/d\omega}.$$

Построение Q-шаров

Кусочно-параболический потенциал:

$$V(\rho^2) = M_\phi^2 \rho^2 \theta \left(1 - \frac{\rho^2}{v^2} \right) + M_\phi^2 v^2 \theta \left(\frac{\rho^2}{v^2} - 1 \right).$$

Решение имеет вид

$$\rho(r) = A \frac{\sin(|\omega|r)}{r} \quad \text{при} \quad \rho^2 > v^2, \quad r < R,$$

$$\rho(r) = B \frac{e^{-\sqrt{M_\phi^2 - \omega^2} r}}{r} \quad \text{при} \quad \rho^2 < v^2, \quad r > R.$$

Потенциал, описывающий тонкостенное приближение,

$$V(\rho^2) = A\rho^2 - B\rho^4 + C\rho^6,$$

Приближённое решение в тонкостенном приближении

$$\rho(r) \simeq \frac{\rho_0}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{r - R}{\delta} \right) \right).$$

Взаимодействие массивных фермионов с полем Q-шара

Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{g}{2}\phi\bar{\psi}^c\psi + \frac{g^\dagger}{2}\phi^*\bar{\psi}\psi^c + |\partial_\mu\phi|^2 - V(|\phi|^2).$$

Введём величину $\chi = i\gamma^2\psi^*$ и, используя разложения

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 e^{-ip_0 t - i\omega t/2} \psi(\vec{x}, p_0),$$

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 e^{-ip_0 t + i\omega t/2} \chi(\vec{x}, p_0),$$

а также введя обозначения

$$\psi(\vec{x}, p_0) = \begin{pmatrix} \xi^\psi \\ \eta^\psi \end{pmatrix}, \quad \chi(\vec{x}, p_0) = \begin{pmatrix} \xi^\chi \\ \eta^\chi \end{pmatrix}$$

запишем уравнения движения в виде

$$\begin{cases} (p_0 + \frac{\omega}{2} - m)\xi^\psi + i\sigma_k \partial_k \eta^\psi - f\xi^\chi = 0, \\ (p_0 + \frac{\omega}{2} + m)\eta^\psi + i\sigma_k \partial_k \xi^\psi + f\eta^\chi = 0, \\ (p_0 - \frac{\omega}{2} - m)\xi^\chi + i\sigma_k \partial_k \eta^\chi - f\xi^\psi = 0, \\ (p_0 - \frac{\omega}{2} + m)\eta^\chi + i\sigma_k \partial_k \xi^\chi + f\eta^\psi = 0, \end{cases}$$

где $f = g\rho$, при этом стоит учитывать связь $\chi(\vec{x}, p_0) = i\gamma^2 \psi^*(\vec{x}, -p_0)$.

Рассмотрим различные диапазоны ω :

- 1 $|\omega| \ll m$,
- 2 $|\omega| \leq 2m$ (этот предел мы и будем рассматривать в дальнейшем),
- 3 $|\omega| > 2m$,
- 4 $|\omega| \gg 2m$.

Переход к нерелятивистскому пределу

Будем считать $|\omega| \simeq m$ и перейдём к нерелятивистскому приближения для следующих мод:

$$p_0 = -\frac{\omega}{2} + m + \epsilon,$$
$$p_0 = -\frac{\omega}{2} - m - \epsilon.$$

Для первой подстановки при малых градиентных членах и $\epsilon \ll m$, $f \ll m$ получим уравнения

$$\begin{cases} \eta^\psi = -(i\sigma_k \partial_k \xi^\psi + f\eta^\chi) / (2m), \\ \xi^\chi = (i\sigma_k \partial_k \eta^\chi - f\xi^\psi) / \omega, \\ \eta^\chi = (i\sigma_k \partial_k f\xi^\psi / \omega + if\sigma_k \partial_k \xi^\psi / (2m)) / (2m - \omega), \\ \epsilon \xi^\psi + \frac{\partial_k^2 \xi^\psi}{2m} + \frac{f^2 \xi^\psi}{\omega} = 0. \end{cases}$$

Уравнения в случае $\omega = 2m$, $\epsilon = 0$ принимают форму:

$$\begin{cases} \sigma_k \partial_k \eta^\psi = f\sigma_2 \eta^{\psi*}, \\ 2m\eta^\psi + i\sigma_k \partial_k \xi^\psi - if\sigma_2 \xi^{\psi*} = 0. \end{cases}$$

Преобразование Фолди-Ваутхайзена

Запишем уравнения движения в виде

$$\begin{pmatrix} m + \epsilon & 0 \\ 0 & m + \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix},$$

где $\hat{H} = \hat{E} + \hat{O}$,

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} m\beta & 0 \\ 0 & m\beta + \omega \end{pmatrix},$$

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} -i\alpha_k \partial_k & f\beta \\ f\beta & -i\alpha_k \partial_k \end{pmatrix},$$

Вид преобразования даётся выражениями

$$\begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} = e^{i\hat{S}} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = e^{-i\hat{S}} \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix}.$$

В таком случае эти уравнения перепишутся в виде

$$\begin{pmatrix} m + \epsilon & 0 \\ 0 & m + \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} = e^{i\hat{S}} \hat{H} e^{-i\hat{S}} \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix}.$$

Переход к нерелятивистскому пределу в случае кусочно-параболического потенциала

Условие стабильности Q-шара: $|\omega| \ll M_\phi$.

Условия нерелятивистского приближения: $\epsilon \ll m$, $f \ll m$,
 $-i\sigma_k \partial_k f \ll m^2$

Условие отсутствия влияния фермионов на поле Q-шара: $m \ll E_Q$.

Тогда уравнение движения имеет вид

$$\epsilon \xi^\psi = -\frac{\partial_k \xi^\psi}{2m} + U(\vec{x}) \xi^\psi,$$

где $U(\vec{x}) = -\frac{f^2}{\omega} + \frac{1}{2m-\omega} (V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) + V_3(\vec{r}) + V_4(\vec{r}) + V_5(\vec{r}))$,

где $V_1(\vec{r}) = -\frac{(\partial_k f)^2}{2m\omega}$, $V_2(\vec{r}) = -\left(\frac{1}{2m^2} + \frac{2}{m\omega} + \frac{2}{\omega^2}\right) f (\partial_k f) \partial_k$,

$V_3(\vec{r}) = -\left(\frac{1}{2m\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right) f (\partial_k^2 f)$, $V_4(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2m^2} + \frac{2}{m\omega} + \frac{2}{\omega^2}\right) \frac{f}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \vec{\sigma} \vec{L}$,

$V_5(\vec{r}) = -\left(\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{m\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right) f^2 \partial_k^2$.

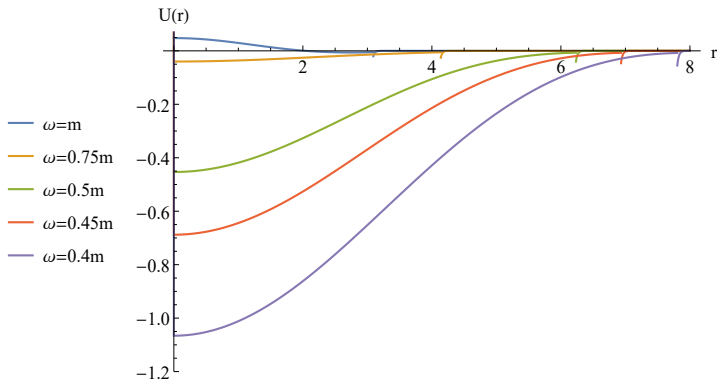


Рис.: График величины потенциала $U(r)$ при различных значениях ω и при фиксированной массе фермиона, при этом параметры теории удовлетворяют наложенным на них в этой главе требованиям и равны $M_\phi = 20$, $g = 0.05$, $\nu = 0.1$, $m = 1$.

Переход к нерелятивистскому пределу в случае тонкостенного приближения

Зависимость размера Q-шара от заряда

$$R \sim \left(Q / \left(\rho_0 \sqrt{V(\rho_0^2)} \right) \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Будем считать: $m \ll M_\phi$.

Условия нерелятивистского приближения: $\epsilon \ll m$, $f \ll m$,
 $-i\sigma_k \partial_k f \ll m^2$

Условие тонкостенного приближения: $\langle U(r)_{surf} \rangle \ll \langle U(r)_{vol} \rangle$.

Условие отсутствия влияния фермионов на поле Q-шара: $m \ll E_Q$.

Условие существования связанных состояний: $R > \sqrt{\frac{\pi^2 \omega_0}{8mf_0^2}}$.

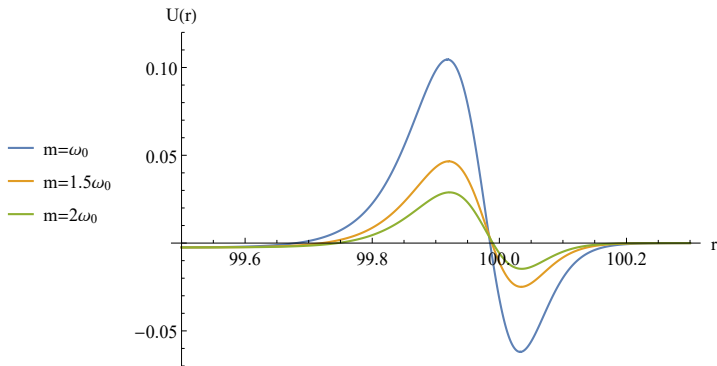


Рис.: График потенциала $U(r)$ для различных значений массы фермиона при фиксированной частоте Q-шара. Мы полагали, что $R = 100$, $1/\delta = M_\phi = 10$, $g = 0.05$, $\rho_0 = 1$, $\omega_0 = 1$. В терминах потенциала Q-шара это значит, что $A = 100$, $B = 198$, $C = 99$.