

Изучение процессов многочастичного рождения методами классической и квантовой теории поля

(магистерская диссертация)

Булат Ринатович Фархтдинов^{1,2}, гр. 283

Научный руководитель: кандидат ф-м наук

Сергей Владимирович Демидов²

МФТИ(ГУ)¹, ИЯИ РАН²

5.07.2018

Предмет исследования

Исследовались процессы многочастичного рождения (ПМР) в теории скалярного поля $\lambda\phi^4$, в которых, как N_i , так и N_f могут быть порядка $1/\lambda$

Были поставлены следующие задачи:

- ▶ Изучить свойства ПМР путём исследования классического режима
- ▶ Провести приготовления к изучению вероятности ПМР в квазиклассическом приближении
- ▶ Использовать полученные результаты для оценки характера подавления ПМР

Организация исследования

Исследование было организовано два этапа:

- ▶ Изучение классически-разрешённой области в пространстве параметров (E, N_i, N_f) процессов рассеяния классических волновых пакетов, связанных с ПМР, и решений на её границе
- ▶ Проведение выкладок, необходимых для изучения вероятностей ПМР с фиксированными E, N_i, N_f в квазиклассическом приближении

Рассматриваемая теория

Исследовалась теория действительного скалярного поля с действием

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right\} \quad (1)$$

В $O(3)$ -симметричном случае после преобразования $r' = mr$, $t' = mt$, $\sqrt{\lambda} \phi = \frac{\chi}{r}$ действие переходит в

$$S' = \frac{4\pi}{\lambda} \int dt' dr' \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t'} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial r'} \right)^2 - \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi^4}{4r'^2} \right] \quad (2)$$

Уравнение поля

Из действия (2) получаем уравнение поля ($r \in [0, R]$)

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \chi + \frac{\chi^3}{r^2} = 0 \quad (3)$$

С граничными условиями

$$\chi|_{r=0} = 0 \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (5)$$

Важно: Уравнение поля симметрично относительно обращения времени

Параметры решений, использованные при исследовании

Общее решение уравнения движения для свободного действительного массивного скалярного поля

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} + a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} \right]_{k_0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \quad (6)$$

Операторы энергии и числа частиц и их классические аналоги

$$E_{lin} = \int d^3\mathbf{k} k_0 a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\chi} \frac{4\pi}{\lambda} \int d\mathbf{k} k_0 \tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \tilde{a}_{\mathbf{k}}|_{k_0=\sqrt{\mathbf{k}^2+1}} \quad (7)$$

$$N = \int d^3\mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\chi} \frac{4\pi}{\lambda} \int d\mathbf{k} \tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \tilde{a}_{\mathbf{k}}|_{k_0=\sqrt{\mathbf{k}^2+1}} \quad (8)$$

В дальнейшем $\tilde{E}_{lin}$ и $\tilde{N}$ будут обозначаться (7) и (8), но без $\frac{4\pi}{\lambda}$

Цели

Путём изучения столкновений $O(3)$ -симметричных волновых пакетов в теории $\lambda\phi^4$ мы стремились достигнуть следующих целей:

- ▶ Найти границы классически-разрешённой области в пространстве (E, N_i, N_f)
- ▶ Изучить свойства «граничных» решений
- ▶ Исследовать закономерности, касающиеся вышеуказанных объектов
- ▶ Оценить применимость полученных результатов к непрерывному пределу

План программной реализации

- ▶ Случайным образом варьировалась начальная конфигурация
- ▶ Путём масштабирования амплитуды поля фиксировалось начальное число частиц (N_i)
- ▶ Решался разностный аналог уравнения поля
- ▶ Полученному решению соответствовала точка в пространстве $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$
- ▶ Процесс варьирования повторялся
- ▶ Записывались параметры последнего принятого решения (энергия, числа частиц, пространственное распределение, Фурье-спектр в начальный момент времени)

Метод стохастической выборки

Для поиска минимумов (максимумов) функционала $\tilde{N}_f(\tilde{E}, \tilde{N}_i)$ был использован метод стохастической выборки (метод имитации отжига).

- ▶ Принятие или непринятие изменённой начальной конфигурации определялось функционалом

$$F = \theta(\tilde{N}_f + \xi(\tilde{E} - \tilde{E}_{fix})^2) \quad (9)$$

- ▶ Вероятность принятия бралась, как $\min(1, e^{-\Delta F})$, где ΔF – разница функционалов до и после вариации

Вид данных для классически-разрешённой области

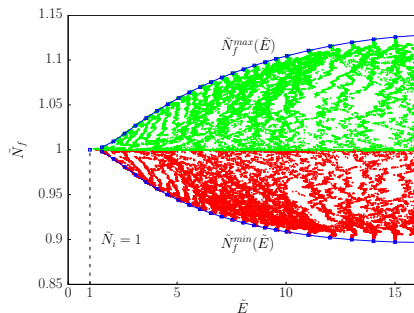


Figure:

Классически-разрешённая
область для $\tilde{N}_i = 1$
(arXiv:1806.10996 [hep-ph])

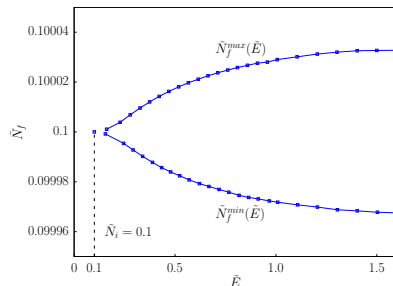


Figure:

Классически-разрешённая
область для $\tilde{N}_i = 0.1$
(arXiv:1806.10996 [hep-ph])

Вид граничных решений для $\tilde{N}_i = 1$

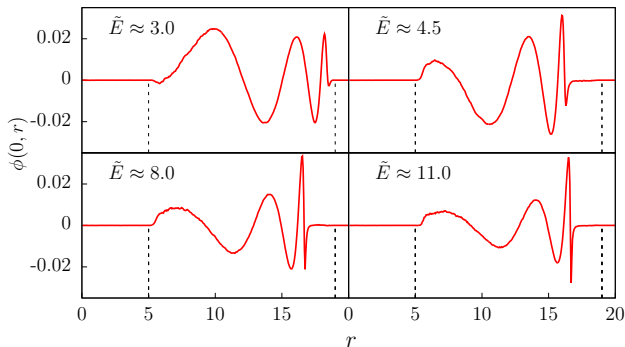


Figure: Вид начальных конфигураций для решений на верхней границе при $\tilde{N}_i = 1, \tilde{E} \approx 3; 4.5; 8; 11$ (arXiv:1806.10996 [hep-ph])

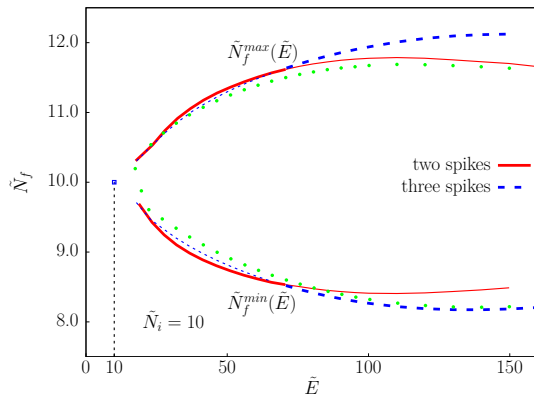
Случай $\tilde{N}_i = 10$ 

Figure: Классически разрешённая область для $N_i = 10$ (arXiv:1806.10996 [hep-ph])

Классически-разрешённые области при разных N_i

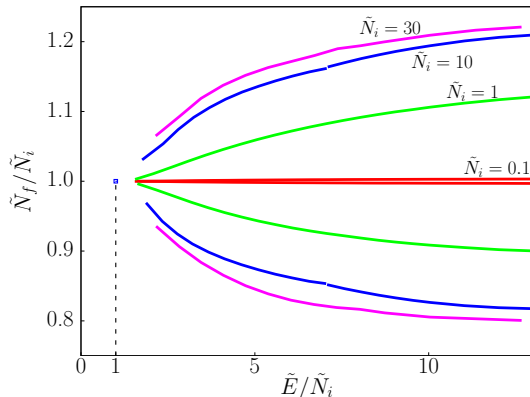


Figure: Классически разрешённые области для $N_i = 0.1; 1; 10; 30$
(arXiv:1806.10996 [hep-ph])

Цели и план программной реализации

- ▶ Используя квазиклассическое приближение получить экспоненту подавления и седловые решения для ПМР с заданными N_i, N_f, E_f в теории с классическим источником J
- ▶ Использовать полученные решения для отладки и проверки алгоритма
- ▶ При помощи алгоритма, задействующего метод Ньютона-Рафсона получить решения в $\lambda\phi^4$, используя решения, полученные из теории с источником, как начальное приближение
- ▶ Исследовать при помощи вышеуказанного алгоритма экспоненту подавления и седловые решения для ПМР при разных значениях N_i, N_f, E_f
- ▶ Изучить предел $N_i \rightarrow 0$

Важные обозначения

Рассматривалась величина

$$\mathcal{P} = \sum_{i,f} | \langle f | \hat{P}_E \hat{P}_{N_f} \hat{S} \hat{P}_{N_i} | i \rangle |^2, \quad (10)$$

В формализме функционального интеграла эта величина приобретает вид

$$\mathcal{P} = \int \mathcal{D}a \mathcal{D}a^\dagger \mathcal{D}b \mathcal{D}b^\dagger \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi' \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\phi_f \mathcal{D}\phi'_i \mathcal{D}\phi'_f d\xi d\eta d\theta e^W, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} W = & -iE\xi - iN_i\eta - iN_f\theta - \int d^3\mathbf{k} [b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} E^{-i\Delta_{\mathbf{k}}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} e^{-i\Delta'}] + iS[\phi] - iS[\phi'] + \\ & + B_i(\phi_i, a) + B_f(\phi_f, b^\dagger) + B_i^\dagger(\phi'_i, a) + B_f^\dagger(\phi'_f, b^\dagger) \end{aligned} \quad (12)$$

Квазиклассическое приближение

Система уравнений на седловые точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k : -a_k^\dagger e^{-i\Delta'} + i\omega_k T_i - a_{-k} e^{-i\omega_k T_i} + \sqrt{2\omega_k} \phi_i(\mathbf{k}) = 0, \\ a_k^\dagger : -a_k e^{-i\Delta'} - i\omega_k T_i - a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k T_i} + \sqrt{2\omega_k} \phi_i'(-\mathbf{k}) = 0, \\ b_k^\dagger : -b_k e^{-i\Delta_k - i\omega_k T_f} - b_{-k}^\dagger e^{i\omega_k T_f} + \sqrt{2\omega_k} \phi_f(-\mathbf{k}) = 0, \\ b_k : -b_k^\dagger e^{-i\Delta_k + i\omega_k T_f} - b_{-k} e^{-i\omega_k T_f} + \sqrt{2\omega_k} \phi_f'(\mathbf{k}) = 0, \\ \phi : (\partial^2 + m^2)\phi = J, \\ \phi' : (\partial^2 + m^2)\phi' = J, \\ \phi_i : -i\dot{\phi}_i(-\mathbf{k}) - \omega_k \phi_i(-\mathbf{k}) + \sqrt{2\omega_k} a_k e^{-i\omega_k T_i} = 0, \\ \phi_i' : i\dot{\phi}_i'(-\mathbf{k}) - \omega_k \phi_i'(-\mathbf{k}) + \sqrt{2\omega_k} a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k T_i} = 0, \\ \phi_f : i\dot{\phi}_f(-\mathbf{k}) - \omega_k \phi_f(-\mathbf{k}) + \sqrt{2\omega_k} b_{-k}^\dagger e^{i\omega_k T_f} = 0, \\ \phi_f' : -i\dot{\phi}_f'(-\mathbf{k}) - \omega_k \phi_f'(-\mathbf{k}) + \sqrt{2\omega_k} b_k e^{-i\omega_k T_f} = 0, \\ \xi : E - \int d^3k \omega_k b_k^\dagger b_k e^{-i\Delta_k} = 0, \\ \eta : N_i - \int d^3k a_k^\dagger a_k e^{-i\Delta'} = 0, \\ \theta : N_f - \int d^3k b_k^\dagger b_k e^{-i\Delta_k} = 0. \end{array} \right. \quad (13)$$

Прделанные выкладки

- ▶ Использовался анзац $\phi'(r, t) = \phi^*(r, t^*)$ и искомые решения, представимые в начальный и конечный моменты времени в виде плоских волн
- ▶ Была получена следующая экспонента подавления

$$W = 2ET + N_i\theta_i - N_f\theta_f - 2Im\tilde{S} \quad (14)$$

- ▶ Была получена экспонента подавления в случае теории с источником

$$W = 2ET + N_i\theta_i - N_f\theta_f - (1 - e^{\theta_i}) \int \frac{dk}{(2\pi)2\omega_k} \tilde{J}(\omega_k, k) \tilde{J}^*(\omega_k, k) \left[\frac{1 - e^{2T\omega_k - \theta_f}}{e^{2\omega_k T + \theta_i - \theta_f} - 1} \right], \quad (15)$$

где $\tilde{J}(\omega_k, k)$ – Фурье образ от $rJ(t, r)$

Заключение

В результате работы

- ▶ Были получены классически-разрешённые области в пространстве (E, N_f) для ряда N_i и их зависимости от параметров рассеяния и решётки
- ▶ Были исследованы решения, приходящиеся на границу классически разрешённой области
- ▶ Были получены данные, указывающие на то, что процессы $2 \rightarrow N$ лежат глубоко в классически запрещённой области
- ▶ Была проведена подготовка к численному изучению квазиклассического режима

Спасибо за внимание!

Разностная схема

При решении уравнения поля использовалось разложение

$$\chi(r, t) = \sum_n c_n(t) \sqrt{\frac{2}{R}} \sin(k_n r) \quad (16)$$

$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2R}$. Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{c}_n(t) + k_n^2 c_n(t) + I_n = 0 \quad (17)$$

$$I_n = \sqrt{\frac{2}{R}} \int_0^R dr \frac{\chi^3}{r^2} \sin(k_n r) \quad (18)$$

Разностная схема

Для решения уравнений использовался алгоритм Булирша-Штоера (проверялся методом Рунге-Кутты 4 порядка). Параметры решений получались из разложения $c_n(t)$ в линейном режиме (аналогично (7) и (8), только без $\frac{4\pi}{\lambda}$)

$$c_n(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(a_n^\dagger e^{i\omega_n t} + a_n e^{-i\omega_n t}) \quad (19)$$

Также энергия вычислялась путём интегрирования T_0^0

$$\tilde{E} = \int_0^R dr \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^2 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{4r^2} \right] \quad (20)$$

Изменение $\tilde{N}(t)$ для граничных решений

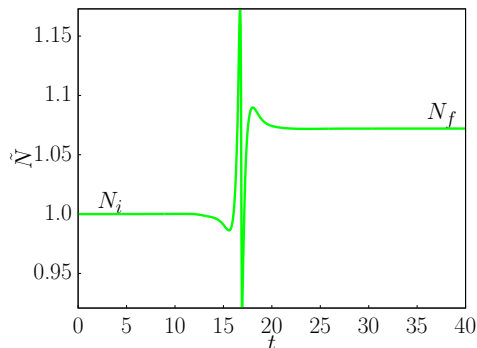


Figure: Изменение $\tilde{N}(t)$ для граничного решения при $\tilde{N}_i = 1$
(arXiv:1806.10996 [hep-ph])

Распределение энергии для граничных решений

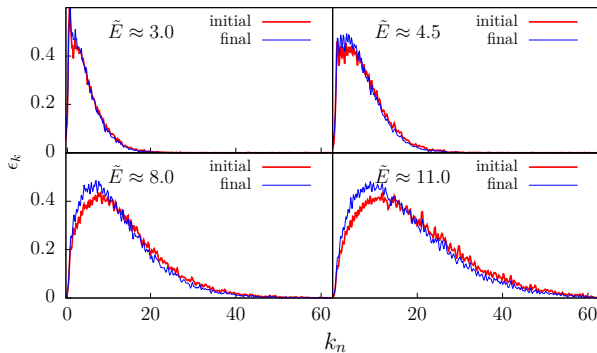


Figure: Распределение энергии для граничных решений на верхней границе при $\tilde{N}_i = 1, \tilde{E} \approx 3; 4.5; 8; 11$ (arXiv:1806.10996 [hep-ph])

Симметрия граничных решений

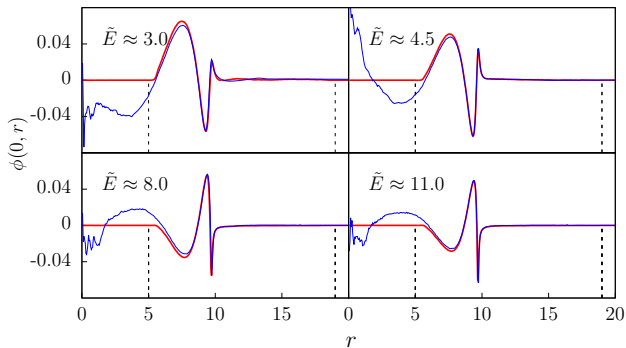


Figure: Смещённые решения и те, что получились при эволюции (arXiv:1806.10996 [hep-ph])

Зависимость сканирования от решётки

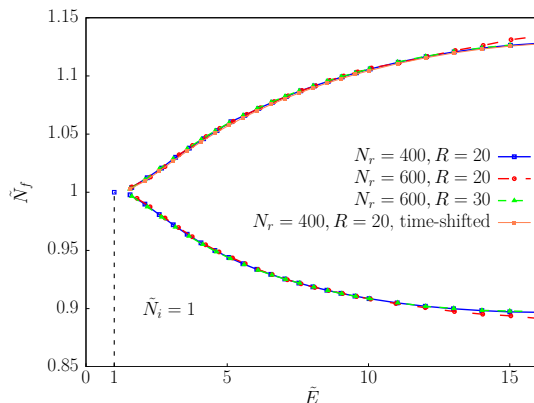


Figure: Огибающие классически-разрешённой области при $\tilde{N}_i = 1$ для различных параметров решётки (arXiv:1806.10996 [hep-ph])

Граничные решения при больших числах частиц

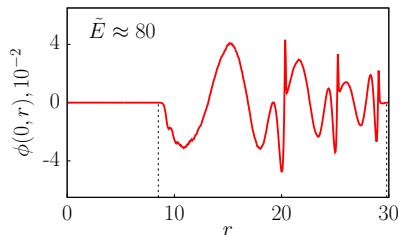


Figure: Нижнее решение с тремя пиками для $\tilde{N}_i = 10$; $\tilde{E} \approx 80$
(arXiv:1806.10996 [hep-ph])

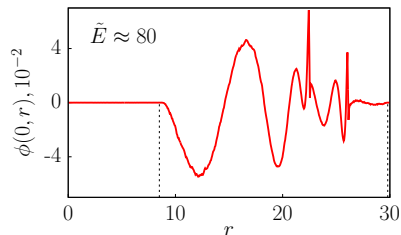


Figure: Верхнее решение с двумя пиками для $\tilde{N}_i = 10$; $\tilde{E} \approx 80$
(arXiv:1806.10996 [hep-ph])

Зависимость изменения числа частиц от начального

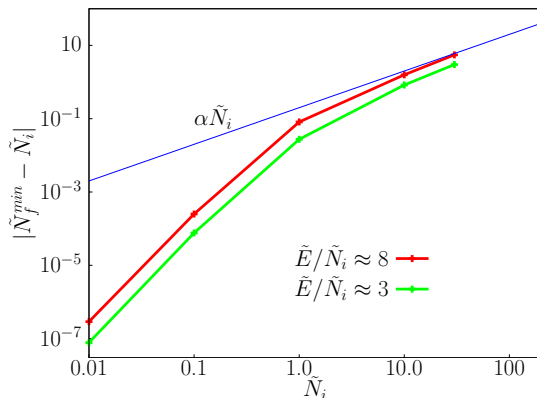


Figure: Зависимость изменения числа частиц от начального при $\tilde{E}/\tilde{N}_i \approx 3; 8$ (arXiv:1806.10996 [hep-ph])