Московский физико-технический институт
Факультет проблем физики и энергетики
Кафедра фундаментыльных взаимодействий и космологии

Губарев Кирилл Алексеевич

Аксионы темной материи в расширяющейся Вселенной

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Научный руководитель: д.ф.-м.н., член-корр. РАН
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Задача

- Показать, что скорость релаксации комплексного и действительного скалярных полей за счет гравитационного взаимодействия пропорциональна плотности неоднородностей этих полей.

Введение

Почему аксионы интересны в качестве темной материи?

- Решают проблему нарушения CP-симметрии в сильном взаимодействии.
- Легкие, если дают основной вклад в темную материю, то имеют высокую плотность, поэтому интересны коллективные эффекты, например конденсация за счет гравитационного взаимодействия.

Комплексное скалярное поле

Возмущенная метрика Фридмана-Робертсона-Уокера вида:

$$g_{\mu\nu} = diag((1+2\Psi), -a^2(1-2\Phi), -a^2(1-2\Phi), -a^2(1-2\Phi)), \tag{1}$$

где $a = a(t)$, $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$, $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$, $|\Phi|, |\Psi| \ll 1$.

Лагранжиан комплексного скалярного поля:

$$\mathcal{L}^{(\phi)} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* + \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi) - \frac{m^2}{2}|\phi|^2. \tag{2}$$

Уравнения движения поля:

$$D^\mu D_\mu \phi + m^2 \phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu \phi - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda \phi + m^2\phi = 0. \tag{3}$$

Из уравнений движения получим:

$$(1-2\Phi)\ddot{\phi} + (3H - \dot{\Psi} - 3\dot{\Phi} - 6H\Phi)\dot{\phi} - \frac{1+2\Psi}{a^2}\triangle\phi + \frac{1}{a^2}\partial_i(\Psi - \Phi)\partial_i\phi + (1+2(\Psi-\Phi))m^2\phi = 0, \tag{4}$$

а из уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}\right)$ для компоненты "00":

$$\triangle\Phi - 3Ha^2(\dot{\Phi} + H\Psi) = 4\pi G a^2 \delta\rho. \tag{5}$$

Из Лагранжиана комплексного скалярного поля найдем канонический ТЭИ:

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* + \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi^* - m^2|\phi|^2). \tag{6}$$

Из ТЭИ получим плотность:

$$\rho_\phi = T^{(\phi)0}{}_0 = \frac{1-2\Psi}{2}|\dot{\phi}|^2 + \frac{1+2\Phi}{2a^2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}m^2|\phi|^2, \tag{7}$$

также введем однородную плотность:

$$\bar{\rho}_\phi = \frac{1}{2}(|\dot{\bar{\phi}}|^2 + m^2|\bar{\phi}|^2), \qquad \bar{\rho}_\phi = \frac{3H^2\Omega_\phi}{(8\pi G)}, \qquad \Omega_\phi \simeq 1, \tag{8}$$

а плотность неоднородностей из (5):

$$\delta\rho = \rho(t,\vec{x}) - \bar{\rho}(t). \tag{9}$$

Считаем $\Phi = \Psi$ (нет анизотропии в ТЭИ), а решение ищем в виде:

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{e^{-imt}}{a^{\frac{3}{2}}}\psi(t, \vec{x}), \qquad \bar{\phi}(t) = \frac{e^{-imt}}{a^{\frac{3}{2}}}\bar{\psi}(t). \tag{10}$$

Тогда из уравнения движения (4) и для плотностей (8), (7) получим:

$$(1-2\Phi)(\ddot{\psi}-2im\dot{\psi})-4\dot{\Phi}(\dot{\psi}-im\psi) = \frac{1+2\Phi}{a^2}\triangle\psi-2\left[m^2\Phi-\frac{3}{4}\left(\dot{H}+\frac{3}{2}H^2\right)(1-2\Phi)+3H\dot{\Phi}\right]\psi, \tag{11}$$

$$a^3\rho_\phi = \frac{1-2\Phi}{2}\left[|\dot{\psi}|^2 - 3H\,\mathrm{Re}(\dot{\psi}\psi^*) - 2m\,\mathrm{Im}(\dot{\psi}\psi^*)\right]+$$
$$+\frac{1+2\Phi}{2a^2}|\nabla\psi|^2 + m^2|\psi|^2\left[1+\frac{9H^2}{8m^2} - \Phi\left(1+\frac{9H^2}{4m^2}\right)\right], \tag{12}$$

$$a^3\bar{\rho}_\phi = \frac{1}{2}\left[|\dot{\bar{\psi}}|^2 - 3H\,\mathrm{Re}(\dot{\bar{\psi}}\bar{\psi}^*) - 2m\,\mathrm{Im}(\dot{\bar{\psi}}\bar{\psi}^*)\right] + m^2|\bar{\psi}|^2\left[1+\frac{9H^2}{8m^2}\right]. \tag{13}$$

Будем считать $\Phi = \mathcal{O}(\epsilon^2)$, $\tau\dot{\Phi} = \mathcal{O}(\epsilon^4)$, где τ, l характерное время и масштаб изменения неоднородностей поля ϕ и соответственно ψ, поэтому пренебрежем им там, где он стоит с членами меньшей степени по $\epsilon \sim 1/(ml) \sim 1/\sqrt{m\tau}$ - малому параметру. Перейдем к безразмерным координатам:

$$\sqrt{4\pi G}\psi \to \psi, \qquad mt \to t, \qquad m\vec{x} \to \vec{x}, \qquad \frac{4\pi G\rho}{m} \to \rho. \tag{14}$$

Также воспользуемся заменой для потенциала:

$$\Phi(t,\vec{x}) = \frac{\Phi_0(t,\vec{x})}{a(t)}. \tag{15}$$

Из уравнения движения и уравнеия Эйнштейна на компоненту "00", с учетом выражений для плотностей, получим:

$$\frac{\triangle\psi}{2a^2} - \frac{1}{2}\ddot{\psi} + i\dot{\psi} = \left[\frac{\Phi_0}{a} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{H}}{m} + \frac{3H^2}{2m^2}\right) + \left(\frac{3H}{m} + 2i\right)\left(\frac{\dot{\Phi}_0}{a} - \frac{H\Phi_0}{a}\right)\right]\psi, \tag{16-a}$$

$$\triangle\Phi_0 - 3\frac{a^2H\dot{\Phi}_0}{m} = \frac{1}{2}\Big[(|\dot{\psi}|^2 - |\dot{\bar{\psi}}|^2) - 3\frac{H}{m}\,\mathrm{Re}(\dot{\psi}\psi^* - \dot{\bar{\psi}}\bar{\psi}^*) + $$
$$- 2\,\mathrm{Im}(\dot{\psi}\psi^* - \dot{\bar{\psi}}\bar{\psi}^*)\Big] + \frac{|\nabla\psi|^2}{2a^2} + (|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2)\left(1 + \frac{9H^2}{8m^2}\right). \tag{16-б}$$

В пределе быстрых осцилляций $H/m \ll 1$, считая $\dot{H} \sim H^2/m$ и переходя обратно к размерным координатам, в нулевом порядке по H/m из (16) получим:

$$\frac{\triangle\psi}{2m^2a^2} - \frac{1}{2m^2}\ddot{\psi} + \frac{i\dot{\psi}}{m} = \frac{\Phi_0}{a}\psi, \tag{17-а}$$

$$\triangle\Phi_0 = 4\pi G\left[\frac{1}{2}(|\dot{\psi}|^2 - |\dot{\bar{\psi}}|^2) - m\,\mathrm{Im}(\dot{\psi}\psi^* - \dot{\bar{\psi}}\bar{\psi}^*) + \frac{|\nabla\psi|^2}{2a^2} + m^2(|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2)\right]. \tag{17-б}$$

Проведем также замену:

$$\psi = \bar{\psi} + \delta\psi, \qquad \bar{\psi} = \bar{\psi}(t) \sim \frac{HM_{Pl}}{m}. \tag{18}$$

Рассмотрим два малых параметра:

$$\eta \sim \frac{\delta\psi}{\bar{\psi}}, \qquad \epsilon \sim \frac{1}{ml} \sim \frac{1}{\sqrt{m\tau}}, \tag{19}$$

$$\frac{\delta\dot{\psi}}{m} \sim \frac{\delta\psi}{m\tau} \sim \epsilon^2\delta\psi, \qquad \frac{\delta\ddot{\psi}}{m^2} \sim \frac{\delta\psi}{m^2\tau^2} \sim \epsilon^4\delta\psi, \qquad \frac{\triangle\delta\psi}{m^2} \sim \frac{\delta\psi}{m^2l^2} \sim \epsilon^2\delta\psi. \tag{20}$$

$$\bar{\psi} \sim \frac{HM_{Pl}}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\bar{\psi}}}{m} \sim \frac{\dot{H}M_{Pl}}{m^2} \sim \frac{H^2M_{Pl}}{m^2}, \qquad \frac{\ddot{\bar{\psi}}}{m^2} \sim \frac{\dot{H}HM_{Pl}}{m^3} \sim \frac{H^3M_{Pl}}{m^3}. \tag{21}$$

Рассмотрим неоднородности такого масштаба, что:

$$\frac{H^2}{m^2} \ll \frac{\delta\psi}{m\tau M_{Pl}} \sim \frac{\delta\psi}{m^2 l^2 M_{Pl}} \sim \frac{\epsilon^2\,\delta\psi}{M_{Pl}}. \tag{22}$$

Из всех вышеперечисленных оценок, получим условия на l:

$$l \sim \frac{1}{\sqrt{Hm}}, \qquad \frac{1}{m} \ll l \ll \frac{\sqrt{\delta\psi}}{H\sqrt{M_{Pl}}}. \tag{23}$$

Для которых получим уравнения Шредингера-Пуассона:

$$\boxed{i\dot{\psi} = -\frac{\triangle\psi}{2a^2 m} + \frac{m}{a}\Phi_0\psi,} \tag{24-а}$$

$$\boxed{\triangle\Phi_0 = 4\pi G m^2(|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2).} \tag{24-б}$$

Отсюда получим Гамильтониан, отвечающий за гравитационное взаимодействие:

$$\boxed{H_g(t,\vec{r}) = -\frac{Gm^3}{a}\int d^3y\,\frac{|\psi(t,\vec{y})|^2 - |\bar{\psi}(t)|^2}{|\vec{r}-\vec{y}|}.} \tag{25}$$

Из вида Гамильтониана (25) видно, что скорость релаксации комплексного скалярного поля будет пропорциональна плотности неоднородностей:

$$\boxed{\Gamma \sim \delta\rho.} \tag{26}$$

Действительное скалярное поле

Для действительного скалярного поля справедливы все вышепроделанные вычисления, за исключением одной детали - появления быстрых осцилляций плотности.

Лагранжиан действительного скалярного поля:

$$\mathcal{L}^{(\phi)} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \tag{27}$$

ТЭИ:

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}^{(\phi)}}{\delta g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}^{(\phi)} g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi - m^2 \phi^2). \tag{28}$$

Плотность энергии:

$$\rho_\phi = \frac{1 - 2\Psi}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1 + 2\Phi}{2a^2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \tag{29}$$

Будем искать решение в виде (поле ϕ действительное):

$$\phi = \frac{e^{-imt}}{a^{\frac{3}{2}}} \psi + \frac{e^{imt}}{a^{\frac{3}{2}}} \psi^* = u + u^*, \qquad u = \frac{e^{-imt}}{a^{\frac{3}{2}}} \psi. \tag{30}$$

Подставля в плотность, получим:

$$\rho_\phi = \frac{1 - 2\Phi}{a^3} \left(-im\psi + \dot{\psi} - \frac{3}{2} H\psi \right) \left(im\psi^* + \dot{\psi}^* - \frac{3}{2} H\psi^* \right) + \frac{1 + 2\Phi}{a^2 a^3} |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{a^3} m^2 |\psi|^2 +$$

$$+ \frac{1 - 2\Phi}{2a^3} 2\,\mathrm{Re} \left(e^{-2imt} \left[-im\psi + \dot{\psi} - \frac{3}{2} H\psi \right]^2 \right) + \frac{1 + 2\Phi}{2a^2 a^3} 2\,\mathrm{Re}(e^{-2imt} (\nabla \psi)^2) + \frac{1}{2a^3} m^2 2\,\mathrm{Re}(e^{-2imt} \psi^2). \tag{31}$$

Считая, что период $T = 2\pi/m$ осцилляций поля ϕ много меньше, чем характерное время изменения неоднородностей τ (что согласуется с (19) и (23), так как $T \ll \tau \Leftrightarrow 1 \ll m\tau$, а из (19) и (23) $\Rightarrow m\tau \sim m^2 l^2 \gg 1$), усредним уравнение для плотности по времени t : $T \ll t \ll \tau$, тогда быстро осциллирующие члены дадут ноль $< e^{-2imt} >_t = 0$, получим необходимое:

$$a^3\rho_\phi = (1-2\Phi)\left[|\dot{\psi}|^2 - 3H\,\mathrm{Re}(\dot{\psi}\psi^*) - 2m\,\mathrm{Im}(\dot{\psi}\psi^*)\right] + \\ + \frac{1+2\Phi}{a^2}|\nabla\psi|^2 + 2m^2|\psi|^2\left[1 + \frac{9H^2}{8m^2} - \Phi\left(1+\frac{9H^2}{4m^2}\right)\right]. \quad (32)$$

С учетом такого временного усреднения и повторяя рассуждения, проведенные для комплексного скалярного поля, получим для действительного поля уравнения Шредингера-Пуассона:

$$\boxed{i\dot{\psi} = -\frac{\triangle\psi}{2a^2 m} + \frac{m}{a}\Phi_0\psi,} \quad (33\text{-а})$$

$$\boxed{\triangle\Phi_0 = 8\pi G m^2(|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2).} \quad (33\text{-б})$$

Из (33) следует Гамильтониан гравитационного взаимодействия и оценка скорости релаксации действительного (типа аксионного) скалярного поля:

$$\boxed{H_g(t,\vec{r}) = -\frac{2Gm^3}{a}\int d^3y\,\frac{|\psi(t,\vec{y})|^2 - |\bar{\psi}(t)|^2}{|\vec{r}-\vec{y}|},} \quad (34)$$

$$\boxed{\Gamma \sim \delta\rho.} \quad (35)$$

Заключение

- уточненены уравнения движения комплексного скалярного поля в возмущенной метрике Фридмана-Робертсона-Уокера, полученные в работе L. Arturo Ureña-López [1], найденные поправки будут существены при рассмотрении ненулевого порядка по H/m
- получены аналогичные уравнения для действительного поля
- в предельном переходе получены уравнения Шредингера-Пуассона и Гамильтониан, дающий правильную оценку скорости релаксации комплексного и действительного поля за счет гравитационного взаимодействия $\Gamma \sim \delta\rho$, последний результат опровергает результат полученный в работе Erken, O. and Sikivie, P. and Tam, H. and Yang, Q. [2].

Список литературы

L. Arturo Ureña López.
Nonrelativistic approach for cosmological scalar field dark matter.
Phys. Rev. D, 90:027306, Jul 2014.
URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.027306,
doi:10.1103/PhysRevD.90.027306.

O. Erken, P. Sikivie, H. Tam, and Q. Yang.
Cosmic axion thermalization.
Phys. Rev. D, 85:063520, Mar 2012.
URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.063520,
doi:10.1103/PhysRevD.85.063520.