

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИИ НАД КЛАССИЧЕСКИ СТАБИЛЬНЫМИ Q -ШАРАМИ

Студент гр. 283 факультета проблем физики и энергетики
Ковтун А.В.

ПЛАН

- Q-шары
- Линейные возмущения
- Спектр в плоском кусочно-параболическом потенциале
- Спектр в полиномиальном потенциале
- Заключение

ОБЗОР

Q-шары

- Q -шары – нетопологические солитоны, возникающие в теориях комплексного скалярного поля с глобальной $U(1)$ -инвариантностью.
- Представляют интерес в контексте феноменологии: являются кандидатами на роль темной материи, могут рассматриваться в качестве прототипов бозонных или солитонных звезд
- Существуют модели с аналитическим решением
- Хорошо изучены численно

Линейные возмущения

- Собственные колебания могут индуцировать гравитационное излучение
- Спектр малых колебаний определяет квантовые флуктуации

Q-ШАРЫ

- Q-шары – нетопологические солитоны, возникающие в теориях комплексного скалярного поля с глобальной $U(1)$ -инвариантностью.

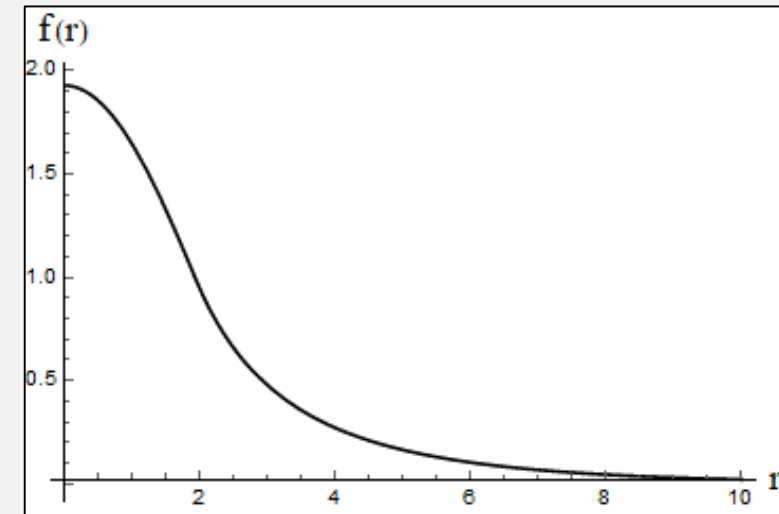
- Действие – $S = \int d^4x \left(|\partial_\mu \phi|^2 - V(|\phi|) \right)$, $U(1)$ -симметрия: $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*$

- Анзац – $\phi(x, t) = e^{i\omega t} f(r)$, энергия – $E = \int d^4x \left((\nabla f)^2 + \omega^2 f^2 + V(|\phi|) \right)$,

$$\text{заряд} - Q = 2 \omega \int d^3x f^2$$

- Граничные условия: $f'(0) = 0, f(\infty) = 0$

- Условия Коулмэна: $\min_{\phi \neq 0} \frac{V(|\phi|)}{|\phi|^2} < \omega^2 < m^2$



ЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

- Малые возмущения: в действии скалярного поля делается подстановка $\phi \rightarrow e^{i\omega t}(f(r) + \psi)$, $\phi^* \rightarrow e^{-i\omega t}(f(r) + \psi^*)$.

Далее оно линеаризуется по полям ψ и ψ^*

- Линеаризованные уравнения движения:
$$(\partial_0 + i\omega)^2 \psi - \Delta \psi = -h(r)\psi^* - g(r)\psi,$$
$$(\partial_0 - i\omega)^2 \psi^* - \Delta \psi^* = -h(r)\psi - g(r)\psi^*$$

$$g(r) = \left(z \frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{dV}{dz} \right) \Big|_{z=f^2(r)}, \quad h(r) = \left(z \frac{d^2 V}{dz^2} \right) \Big|_{z=f^2(r)}, \quad \text{где } z = |\phi|^2$$

- Задача нахождения спектра не сводится к задаче на поиск собственных значений Эрмитового оператора. В общем случае оператор, действующий на столбец $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \end{pmatrix}$, не приводится к диагональному виду
- Модели для изучения спектра собственных колебаний были выбраны с целью получить наглядное аналитическое решение

Q-ШАРЫ В ТЕОРИИ С ПЛОСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

- $V(|\phi|) = m^2 |\phi|^2 \theta \left(1 - \frac{|\phi|^2}{v^2} \right) + m^2 v^2 \theta \left(\frac{|\phi|^2}{v^2} - 1 \right),$

m — масса свободных бозонов,

v — точка выхода на плоское направление

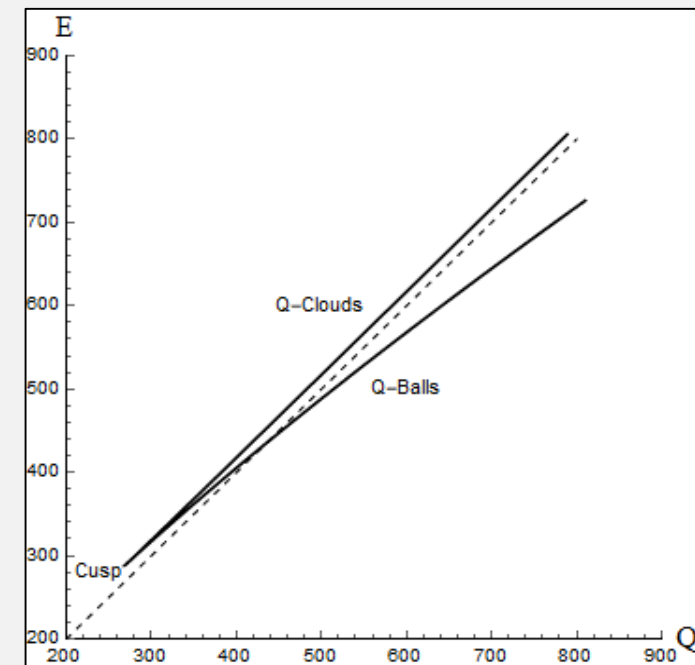
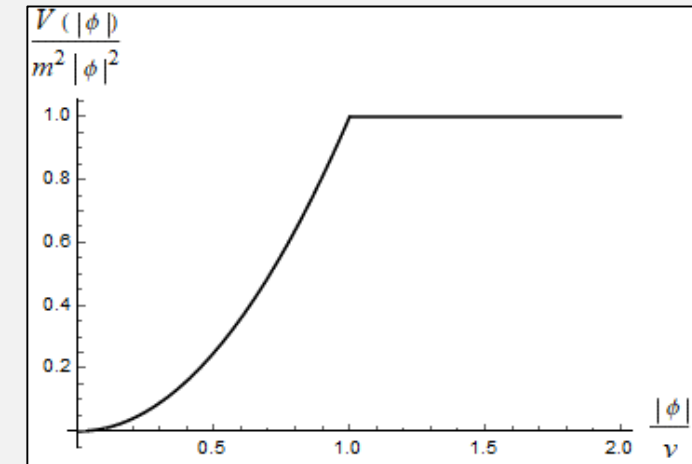
- $0 < \omega < m$

- В такой теории существует два вида решений: Q -шары ($\omega < \omega_c$),
 Q -клауды ($\omega > \omega_c$).

Точка ω_c определяется из уравнения $\left. \frac{dQ}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = 0$, $\omega_c = 0.9604 m$

- Для Q -клаудов выполняется $\frac{dQ}{d\omega} > 0$, для Q -шаров $\frac{dQ}{d\omega} < 0$

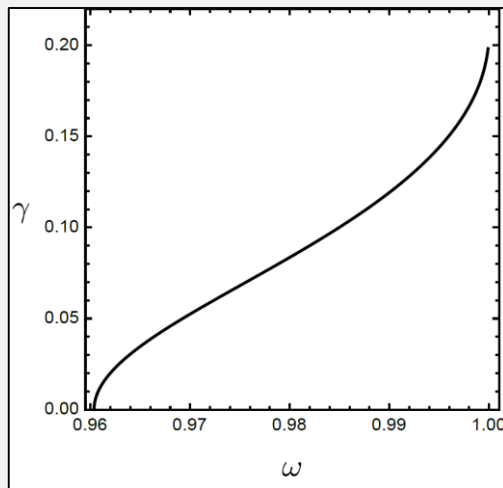
- Q -шары делятся на два класса:
 $\omega < \omega_s$, застрахованы от распада на свободные бозоны ($E < mQ$)
 $\omega_c > \omega > \omega_s$, могут распасться на свободные бозоны ($E > mQ$)



СПЕКТР ВОЗМУЩЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ КАСПА

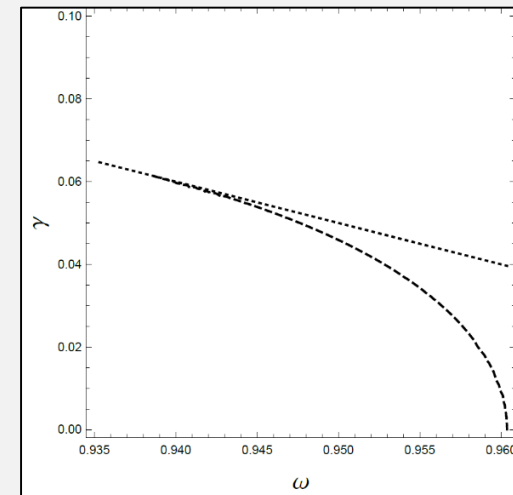
РАСПАДНАЯ ВЕТВЬ

- Анзац: $\psi(x, t) = \zeta(x)e^{\gamma_D t}$
- Уравнения: $(\gamma_D + i\omega)^2 \zeta - \Delta \zeta = -h(r)\zeta^* - g(r)\zeta,$
 $(\gamma_D - i\omega)^2 \zeta^* - \Delta \zeta^* = -h(r)\zeta - g(r)\zeta^*$
- Граничные условия: $\partial_r \zeta(0) = 0, \zeta(\infty) = 0$
- Решение: $\gamma_D = \gamma_D(\omega)$
- В окрестности ω_c имеем $\gamma_D(\omega) = C\sqrt{\omega - \omega_c} + \mathcal{O}(\omega - \omega_c)^{3/2}$
- Мода: $\psi(x, t) = A e^{\gamma_D t} \left(if + \gamma_D \frac{\partial f}{\partial \omega} + \mathcal{O}(\gamma_D^2) \right)$



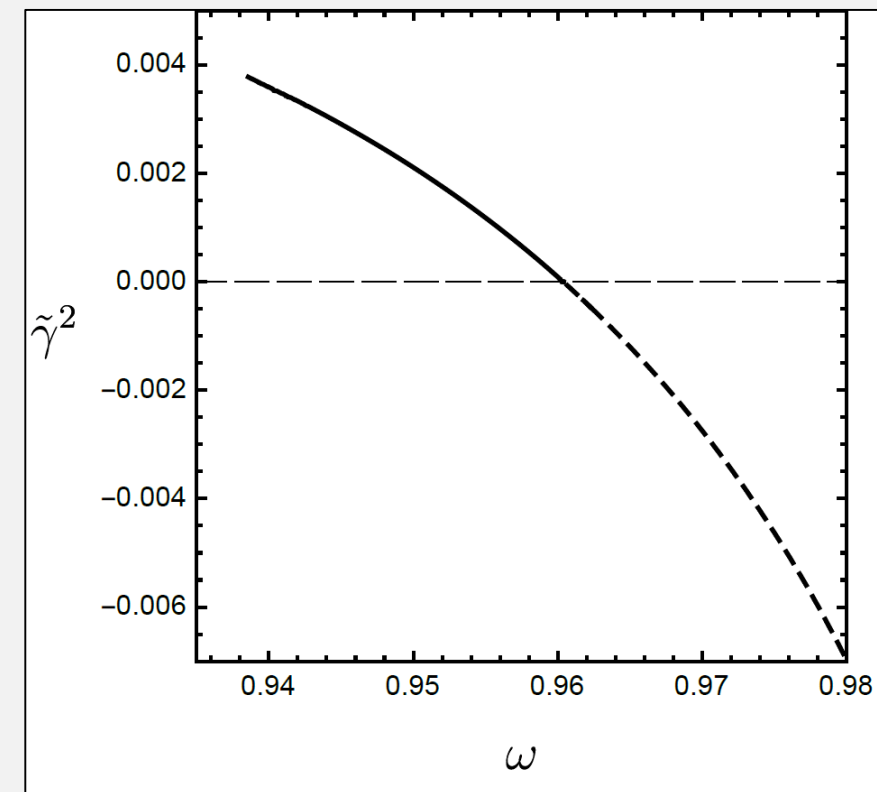
КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ ВЕТВЬ

- Анзац: $\psi(x, t) = \psi_1(x)e^{i\gamma_V t} + \psi_2(x)e^{-i\gamma_V t}$
- Уравнения: $-(\gamma_V + \omega)^2 \psi_1 - \Delta \psi_1 = -h(r)\psi_2^* - g(r)\psi_1,$
 $-(\gamma_V - \omega)^2 \psi_2 - \Delta \psi_2 = -h(r)\psi_1^* - g(r)\psi_2$
- Граничные условия: $\partial_r \psi_{1,2}(0) = 0, \psi_{1,2}(\infty) = 0$
- Решение: $\gamma_V = \gamma_V(\omega)$
- В окрестности ω_c имеем $\gamma_D(\omega) = C\sqrt{\omega_c - \omega} + \mathcal{O}(\omega_c - \omega)^{3/2}$
- Мода: $\psi_1(x) = A \left(f + \gamma_V \frac{\partial f}{\partial \omega} + \mathcal{O}(\gamma_V^2) \right), \psi_2(x) = A \left(-f + \gamma_V \frac{\partial f}{\partial \omega} + \mathcal{O}(\gamma_V^2) \right)$



СВЯЗЬ РАСПАДНОЙ И КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ВЕТВЕЙ

- Можно определить величину $\tilde{\gamma}$:
$$\tilde{\gamma}^2 = \begin{cases} \tilde{\gamma}^2 = \gamma_V^2, & \omega < \omega_c \\ \tilde{\gamma}^2 = -\gamma_D^2, & \omega > \omega_c \end{cases}$$
- Видно, что $\tilde{\gamma}^2$ гладкая функция ω
- Распадная и колебательная ветви являются аналитическими продолжениями друг друга
- Рассмотренная колебательная ветвь находится в области метастабильных Q -шаров

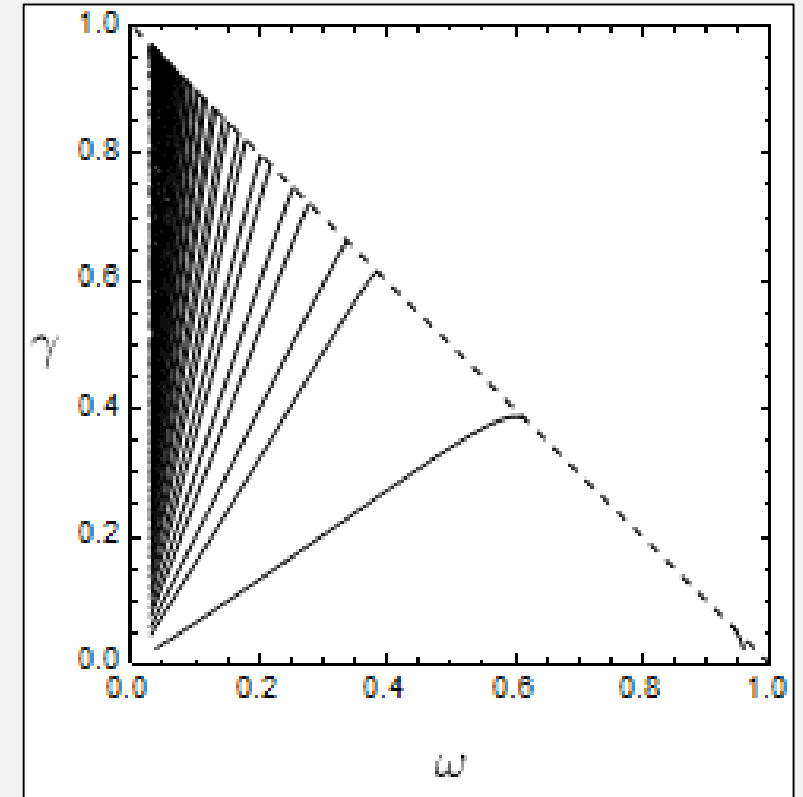


СПЕКТР АБСОЛЮТНО СТАБИЛЬНЫХ Q -ШАРОВ

- Анзац: $\psi(x, t) = \psi_1(x)e^{i\gamma_V t} + \psi_2(x)e^{-i\gamma_V t}$
- Уравнения: $-(\gamma_V + \omega)^2 \psi_1 - \Delta \psi_1 = -h(r)\psi_2^* - g(r)\psi_1,$
 $-(\gamma_V - \omega)^2 \psi_2 - \Delta \psi_2 = -h(r)\psi_1^* - g(r)\psi_2$
- Граничные условия: $\partial_r \psi_{1,2}(0) = 0, \psi_{1,2}(\infty) = 0$
- Решение: $\gamma_V = \gamma_V(\omega)$
- Спектр приблизительно линейный
- Для мод с $l = 0$ спектр аппроксимируется формулой

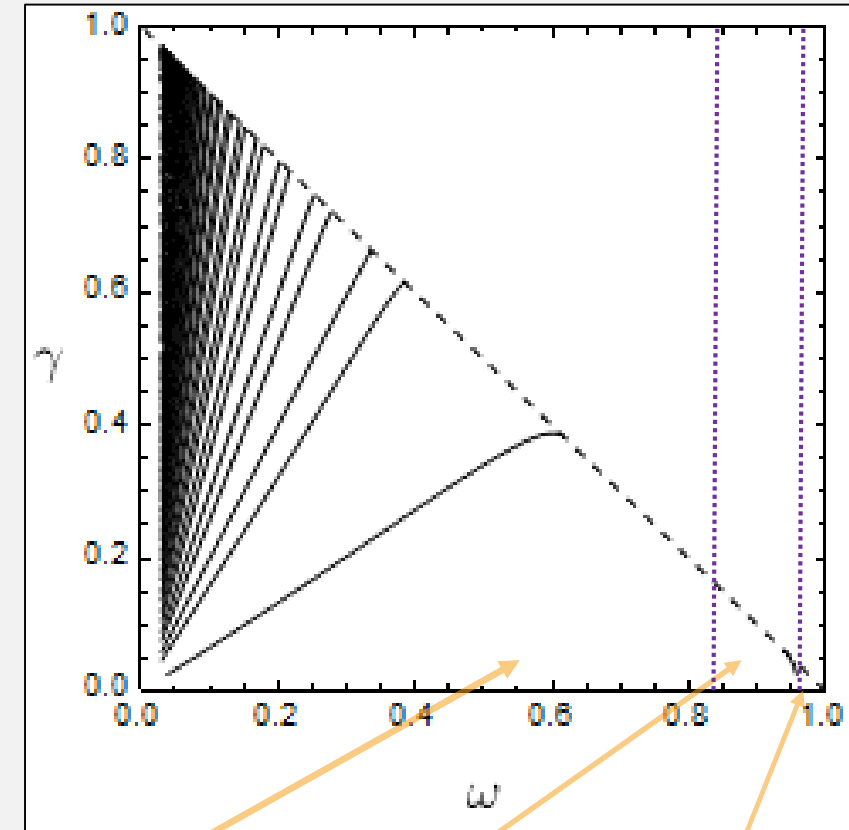
$$\gamma_V \approx \frac{1}{2} n \omega, \quad n \in \mathbb{N}/\{2\}$$

- Для больших Q -шаров ($\omega \rightarrow 0, Q \sim 1/\omega^4 \rightarrow \infty$) существуют мягкие моды: $|\omega \pm \gamma| \ll m$



ЗАМЕЧАНИЯ К АНАЛИЗУ СПЕКТРА

- $0 < \omega < \omega_s$ – область абсолютной стабильности
- $\omega_s < \omega < \omega_c$ – область метастабильности
- $\omega_c < \omega < m$ – область неустойчивости
- Есть область, в которой отсутствует непрерывный спектр



S

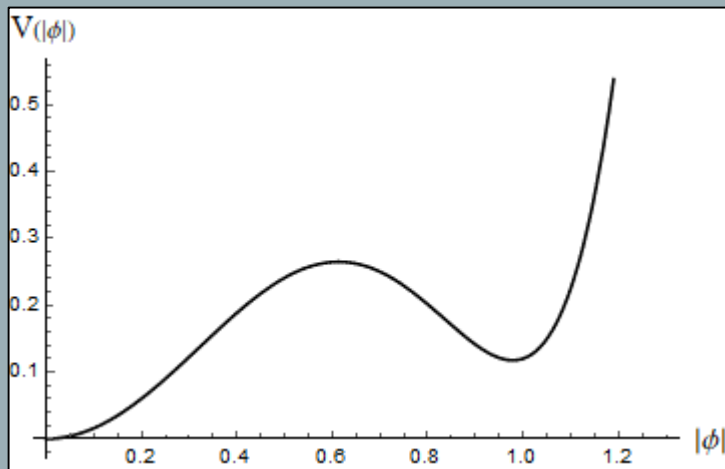
MS

I

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ. ТОНКОСТЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

$$V(|\phi|) = \delta|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2 + \omega_{min}^2|\phi|^2$$

Условия Коулмэна: $\omega_{min} < \omega < m \equiv \sqrt{\omega_{min}^2 + \delta v^4}$



- Параметр, контролирующий тонкостенное приближение

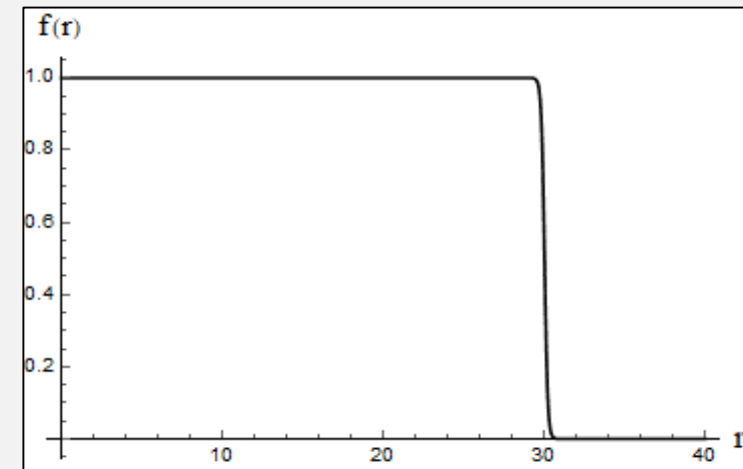
$$\epsilon = \omega - \omega_{min}$$

- Аппроксимация профиля: $f(r) = f_0 \theta(1 - r/R(\omega))$

- $f_0 = v(1 + \mathcal{O}(\epsilon))$

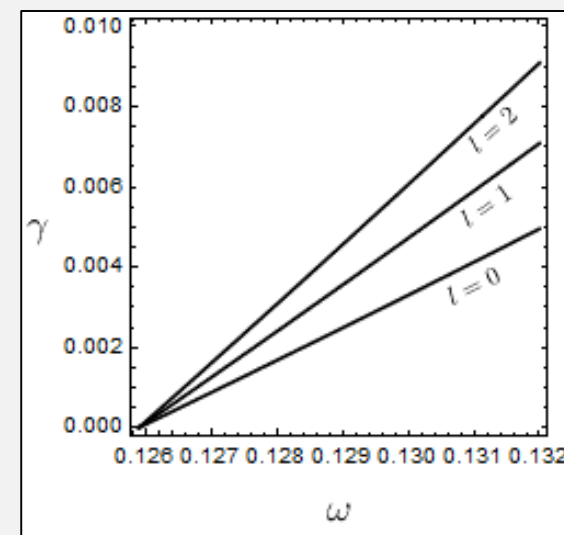
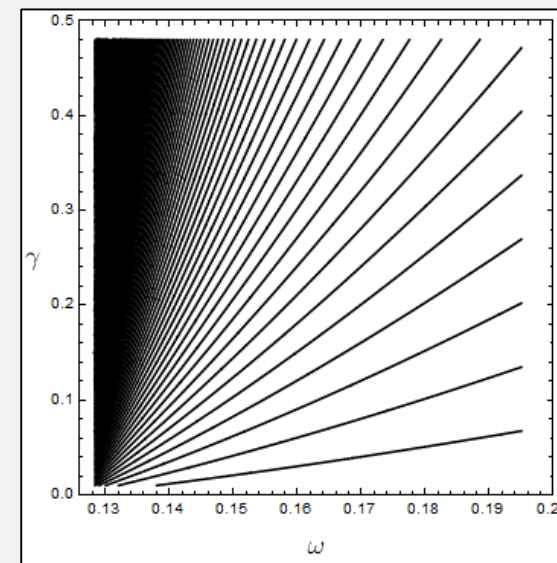
- $R(\omega) = \frac{\sqrt{\delta}v^2}{2\omega_{min}} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(1)$

- $Q = \frac{8}{3}\pi R^3 \omega f_0^2, \quad E = 8\pi R^2 \sqrt{\delta} v^4 + \frac{4}{3}\pi R^3 (\omega^2 + \omega_{min}^2) f_0^2$



ВОЗМУЩЕНИЯ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

- Спектр изучается в пределе $\omega \rightarrow \omega_{min}$
- Анзац: $\psi(x, t) = \psi_1(x)e^{i\gamma_V t} + \psi_2(x)e^{-i\gamma_V t}$
- Уравнения: $-(\gamma_V + \omega)^2 \psi_1 - \Delta \psi_1 = -h(r)\psi_2^* - g(r)\psi_1,$
 $-(\gamma_V - \omega)^2 \psi_2 - \Delta \psi_2 = -h(r)\psi_1^* - g(r)\psi_2$
- Граничные условия: $\partial_r \psi_{1,2}(0) = 0, \psi_{1,2}(\infty) = 0$
- Решение: $\gamma_V = \gamma_V(\omega)$
- Аппроксимация решения: $\gamma_V \approx \frac{2\omega_{min}}{m} \mu_{n, l+\frac{1}{2}}(\omega - \omega_{min})$
- Число мод: $N \sim \left(\frac{m - \omega_{min}}{\omega - \omega_{min}} \right)^3$



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Спектр вблизи ω_{min} приблизительно линеен
- В теориях с плоским потенциалом существуют мягкие моды вблизи $\omega = 0$
- Для критических решений существует малый параметр, по которому можно построить теорию возмущений для мод
- Изучение свойства характерны для многих моделей