

Изучение спектра реликтового излучения.

Работу выполнил:

Михальченко А.О.

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. Строков В.Н.

МФТИ

2019

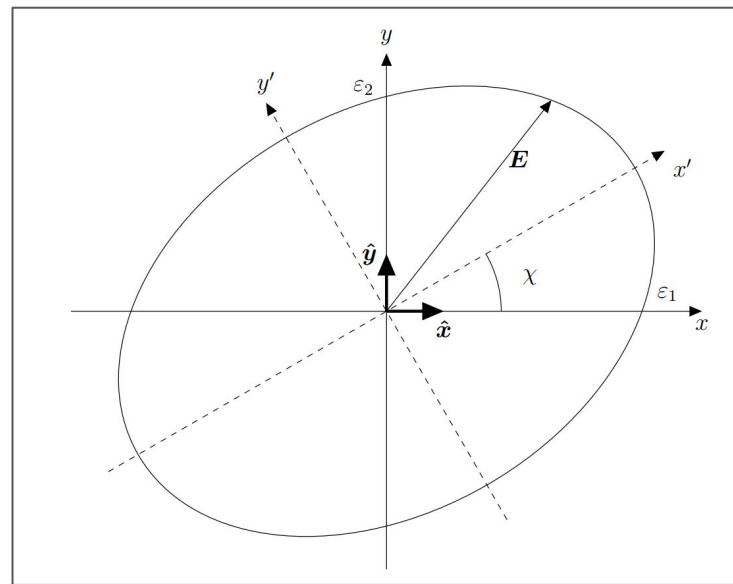
Цель работы: восстановление "загрязненных" систематической ошибкой (утечка интенсивности в поляризацию) данных, полученных в ходе эксперимента ТПланк, на основе модельной задачи (приближение плоского неба), располагая только направлением, но не амплитудой поляризации, с построением корреляционной функции, необходимой для восстановления спектра мощности.

Параметры Стокса

:: Фигура, заметаемая концом вектора напряженности плоской монохроматической волны (E_1, E_2) в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, является эллипсом

$$\begin{cases} E_x = \varepsilon_1 \cos(\omega t - \phi_1) \\ E_y = \varepsilon_2 \cos(\omega t - \phi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E'_x = \varepsilon_0 \cos \beta \cos \omega t \\ E'_y = -\varepsilon_0 \sin \beta \cos \omega t \end{cases}$$



:: Параметры Стокса определяются как

$$I \equiv \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \varepsilon_0^2$$

$$Q \equiv \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 = \varepsilon_0^2 \cos 2\beta \cos 2\chi$$

$$U \equiv 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) = \varepsilon_0^2 \cos 2\beta \sin 2\chi$$

$$V \equiv \varepsilon_1\varepsilon_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) = \varepsilon_0^2 \sin 2\beta$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{I}$$

$$\sin 2\beta = \frac{V}{I}$$

$$\tan 2\chi = \frac{U}{Q}$$

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$$

Параметры Стокса

:: В случае квазимонохроматической волны, когда

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(t) = \varepsilon_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ E_2(t) = \varepsilon_2(t)e^{i\phi_2(t)} \end{array} \right.$$

:: Параметры Стокса для квазимонохроматической волны

$$I \equiv \langle E_1 E_1^* \rangle + \langle E_2 E_2^* \rangle = \langle \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \rangle$$

$$Q \equiv \langle E_1 E_1^* \rangle - \langle E_2 E_2^* \rangle = \langle \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 \rangle$$

$$U \equiv \langle E_1 E_2^* \rangle + \langle E_2 E_1^* \rangle = \langle 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle$$

$$V \equiv -i(\langle E_1 E_2^* \rangle - \langle E_2 E_1^* \rangle) = \langle 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \rangle$$

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$$

:: Усреднение по времени медленно меняющихся комбинаций $E_1(t)$ и $E_2(t)$.

$$\langle E_1 E_2^* \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_1(t) E_2^*(t) dt$$

:: Параметр Q соответствует линейной поляризации вдоль одной из осей, тогда как U - лин. поляризации, направленной под углом 45° к координатным осям.

$$Q = \frac{I_x - I_y}{I}$$
$$U = \frac{I_{x'} - I_{y'}}{I}$$

:: Не все параметры Стокса ротационно инвариантны

$$I' = I \quad V' = V \quad Q' \pm iU' = e^{\pm 2i\varphi} (Q \pm iU)$$

Тензор Поляризации

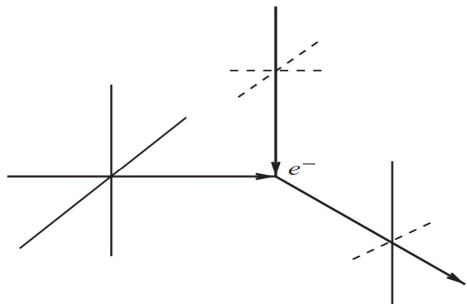
:: Тензор поляризации электромагнитной волны $\mathbf{E} = E_1\epsilon^{(1)} + E_2\epsilon^{(2)}$

$$P_{ij} = \tilde{P}_{ab}\epsilon_i^{(a)}\epsilon_j^{(b)}, \quad \tilde{P}_{ab} = E_a^*E_b$$

:: $\tilde{P}_{ab}$ - это эрмитова матрица 2×2 , представляемая в виде

$$\tilde{P}_{ab} = \frac{1}{2} \left[I\sigma_{ab}^{(0)} + U\sigma_{ab}^{(1)} + V\sigma_{ab}^{(2)} + Q\sigma_{ab}^{(3)} \right] = \frac{1}{2} I\sigma_{ab}^{(0)} + \mathcal{P}_{ab}$$

:: При томпсоновском рассеянии круговой поляризации, за которую отвечает V , не возникает, поэтому $V = 0$ и



$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{pmatrix}$$

:: Инварианты, с которыми удобнее работать:

$$\text{Tr}\mathcal{P} = \sum P_{ii} \quad \det\mathcal{P} = Q^2 + U^2.$$

:: На малых угловых масштабах, пренебрегая кривизной сферы и считая участок неба приблизительно плоским

$$\mathcal{M}(x, n) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(x) Y_{lm}(n) \rightarrow$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{l_x, l_y} a_{l_x}^{l_y} \cos(l_x x + l_y y) + b_{l_x}^{l_y} \sin(l_x x + l_y y)$$

:: Используя векторный оператор дифференцирования, можно построить ещё два инварианта.

$$\mathcal{E} = \partial_i \partial_j P_{ij}$$

$$\mathcal{B} = \epsilon_{kj} \partial_k \partial_j P_{ij}$$

$$\mathcal{E} = (\partial_1^2 - \partial_2^2)Q + 2\partial_1\partial_2U$$

$$\mathcal{B} = (\partial_1^2 - \partial_2^2)U + 2\partial_1\partial_2Q$$

$$P_{ij} = (2\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\partial_k\partial_k)\Phi$$

Введение Поля

$$\Phi = \sum_{k_1, k_2} a_{k_1}^{k_2} \cos(k_1 x + k_2 y) + b_{k_1}^{k_2} \sin(k_1 x + k_2 y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k_1}^{k_2} = \frac{1}{(k_1)^2 + (k_2)^2} \chi_a \\ b_{k_1}^{k_2} = \frac{1}{(k_1)^2 + (k_2)^2} \chi_b \end{array} \right.$$

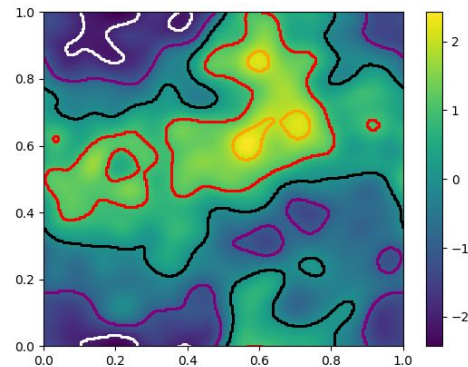
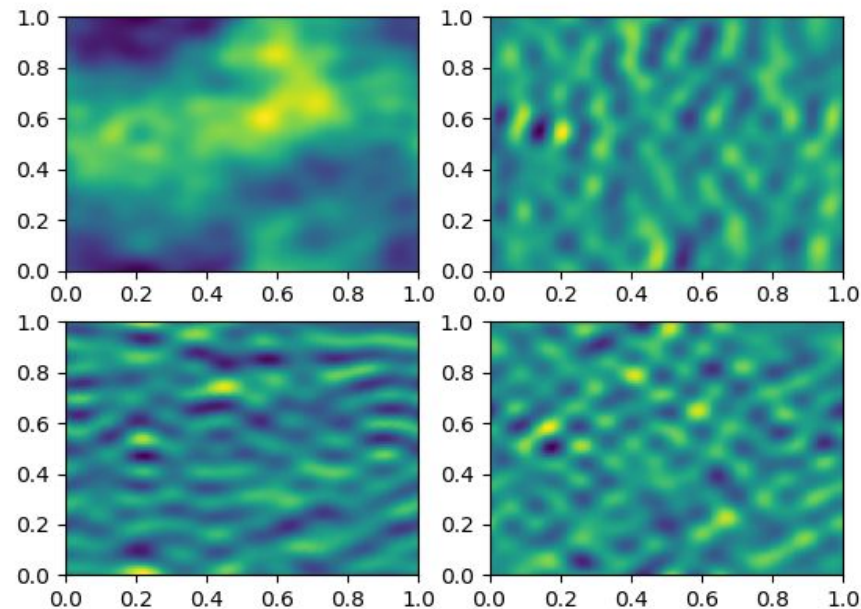
$$\mathcal{P}_{11} \equiv Q = \Phi_{xx} - \Phi_{yy}$$

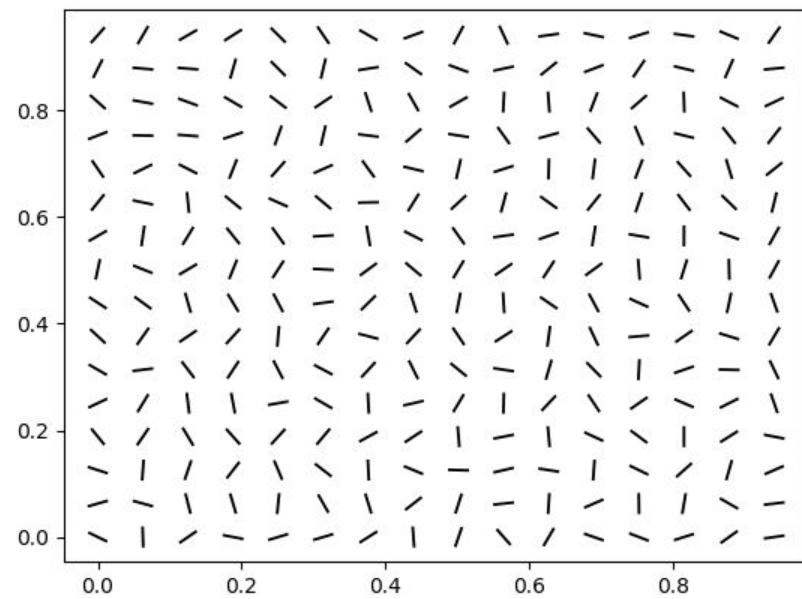
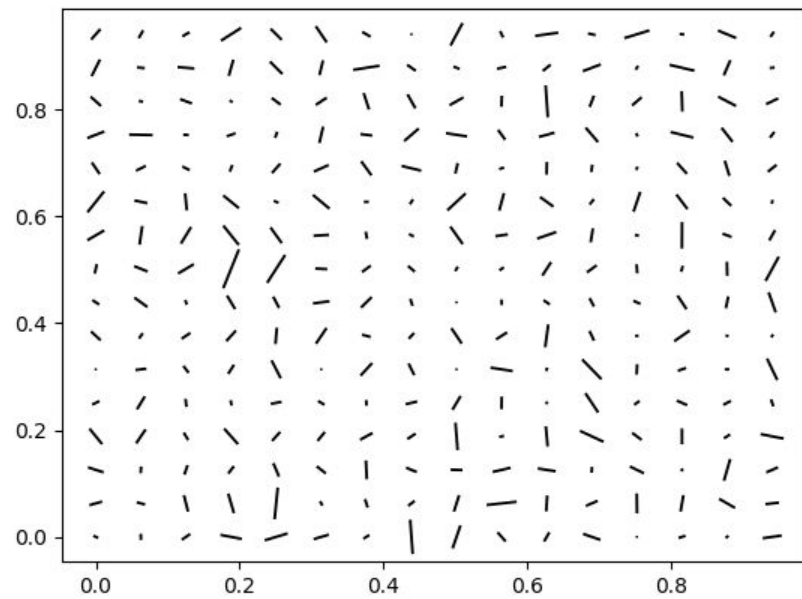
$$\mathcal{P}_{12} \equiv U = -2\Phi_{xy}$$

$$\Phi_{xx} = - \sum_{k_1, k_2} a_{k_1}^{k_2} (k_1)^2 [a_{k_1}^{k_2} \cos(k_1 x + k_2 y) + b_{k_1}^{k_2} \sin(k_1 x + k_2 y)]$$

$$\Phi_{yy} = - \sum_{k_1, k_2} a_{k_1}^{k_2} (k_2)^2 [a_{k_1}^{k_2} \cos(k_1 x + k_2 y) + b_{k_1}^{k_2} \sin(k_1 x + k_2 y)]$$

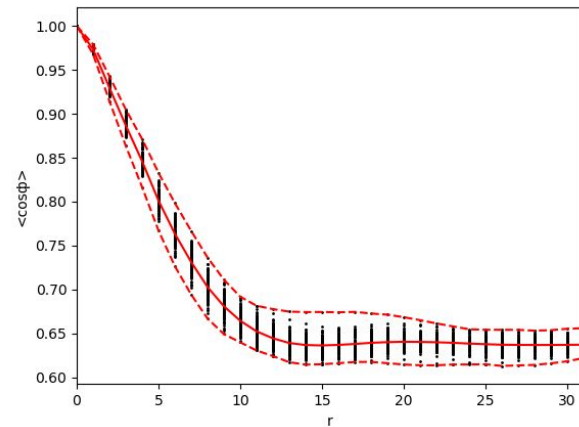
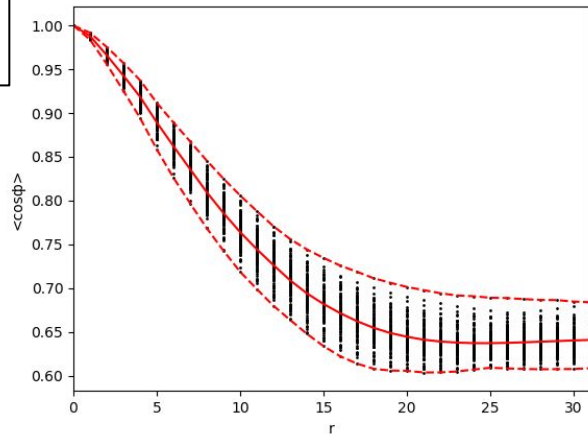
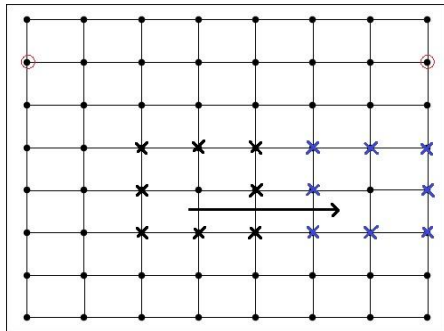
$$\Phi_{xy} = - \sum_{k_1, k_2} a_{k_1}^{k_2} (k_1 k_2) [a_{k_1}^{k_2} \cos(k_1 x + k_2 y) + b_{k_1}^{k_2} \sin(k_1 x + k_2 y)]$$





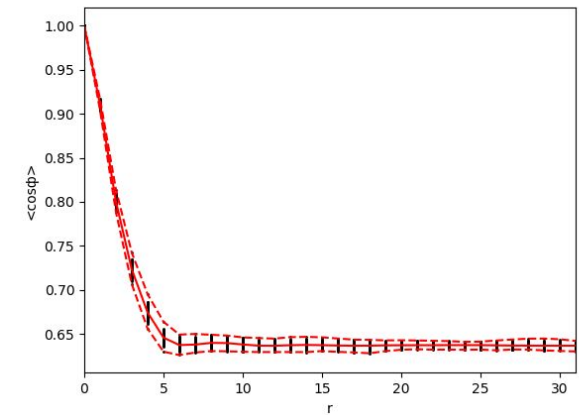
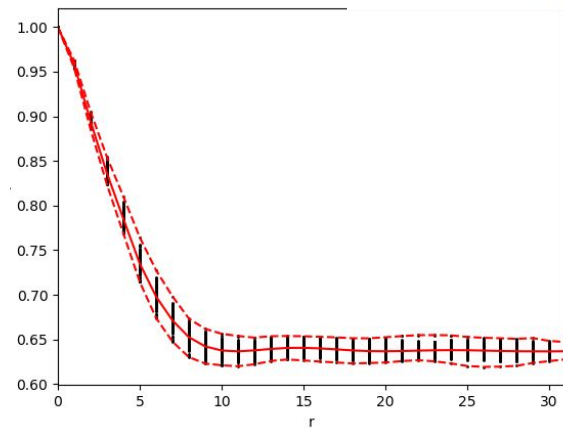
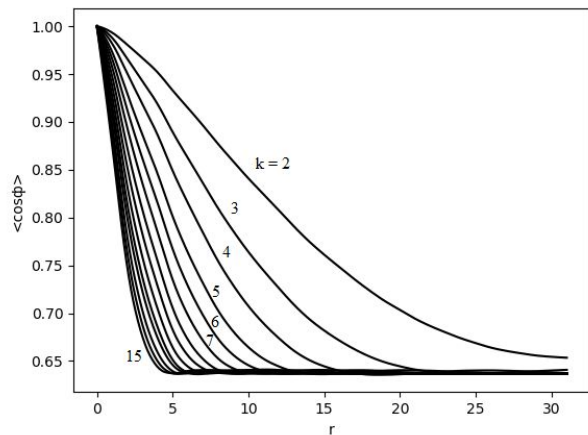
:: Утечка влияет на амплитуду поляризации, но не на направление.

Корреляционная функция



$$C(r) = \bar{C}_{obs}(r) = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_k J_0(kr)$$

$$C_k = 2\pi \int_0^\infty r dr J_0(r l) C_{obs}(r)$$



Вывод: В данной работе рассматривалось так называемое приближение для плоского неба на малых угловых масштабах, в качестве начального было взято случайное двумерное скалярное поле. С помощью параметров Стокса были вычислены углы поляризации и построена корреляционная функция сначала усреднением по квадрату $N \times N$, а затем по ансамблю из 100 реализаций.

В перспективе для восстановления спектра мощности необходимо произвести подобные исследования на сфере с реальными данными, полученными в ходе эксперимента Планк. Для этого должны быть использованы сферические гармоники и соответствующая пикселизация сферы HEALPix.

Спасибо за внимание !