Космологические решения в скалярно-тензорной теории Хорндески

Юлия Александровна Агеева

1.3.3 — Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

21 сентября 2023 г.

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
Миронов С. А.

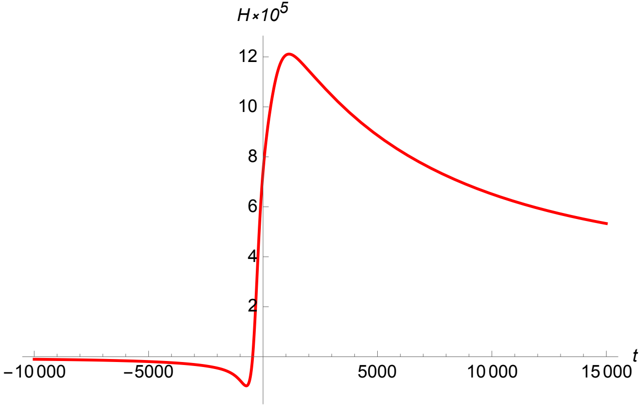
Мотивация

- В инфляционной теории существует ряд неразрешенных проблем. Одной из них, например, является **проблема геодезической неполноты**, которая указывает на то, что в теории может быть **сингулярность**.
- Детальное исследование **альтернативных сценариев** косвенно может быть своего рода подтверждением теории инфляции, если другие сценарии по каким-либо причинам окажутся нежизнеспособны.
- С другой стороны, новые сценарии ранней Вселенной **могут дополнить инфляционную модель**, избавляя ее, например, от упомянутой выше начальной сингулярности.

Цель работы

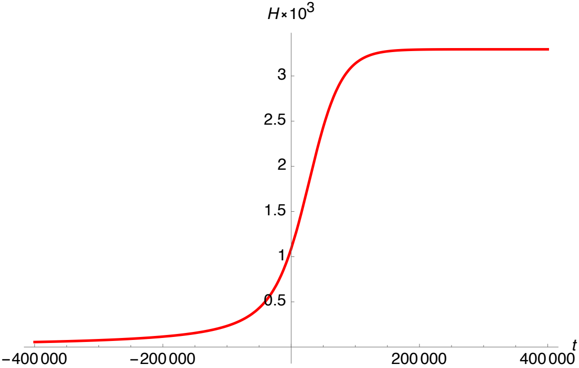
- Изучение классических космологических решений без начальной сингулярности в скалярно-тензорных теориях гравитации со старшими производными, **анализ проблемы режима сильной связи** в таких моделях и построение полной эволюции ранней Вселенной, устойчивой на всех временах.

Альтернативные сценарии: Вселенная с отскоком



Qui'2011,2013; Easson'2011; Cai'2012;
Osipov'2013; Koehn'2013; Battarra'2014; Ijjas'2016

Альтернативные сценарии: генезис



P. Creminelli, A. Nicolis, E. Trincherini'2010

Изотропное условие энергодоминантности

- Если для описания системы используется общая теория относительности, то важной характеристикой является **изотропное условие энергодоминантности** (null energy condition, NEC) для ТЭИ $T_{\mu\nu}$:
$$T_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} > 0, \quad g_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} = 0,$$
для любого светоподобного вектора k^{μ}. Тогда из уравнений Эйнштейна и ковариантного закона сохранения (в метрике ФЛРУ) следует, что $\dot{H} < 0$, где H – параметр Хаббла, а также и $\frac{d\rho}{dt} < 0$.
- Это означает, что в прошлом расширяющейся Вселенной существует сингулярность.
- Так, сценарии без сингулярности требуют **нарушения NEC**.

Теория Хорндески

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_H,$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H = G_2(\varphi, X) - G_3(\varphi, X)\Box\varphi +\\ G_4(\varphi, X)R + G_{4,X}\left[(\Box\varphi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi)^2\right]\\ + G_5(\varphi, X)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi\\ - \frac{1}{6}G_{5,X}\left[(\Box\varphi)^3 - 3\Box\varphi(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi)^3\right],\end{aligned}$$

$$X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi,$$

$$\Box\varphi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi.$$

G.Horndeski'1974

Теория Хорндески

- Лагранжиан теории Хорндески устроен так, что хоть он и содержит высшие производные, при получении уравнений движения происходят определенные сокращения, и сами полевые уравнения имеют второй порядок по производным. **Нет духов Остроградского**.
- Допустимо нарушение NEC без возникновения патологий в линеаризованной теории.

1. Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

- Лагранжиан подкласса теории Хорндески:

$$\mathcal{L} = G_2(\varphi, X) - G_3(\varphi, X)\Box\varphi + G_4(\varphi)R,$$

- Данный лагранжиан допускает построение модели генезиса, с которого начинается эволюция Вселенной:

$$H \approx \frac{\chi}{(-t)^{1+\delta}}, \quad t \to -\infty, \quad \delta > 0, \quad \chi > 0,$$

$$a \approx 1 + \frac{\chi}{\delta(-t)^{\delta}}, \quad t \to -\infty.$$

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

- Если же рассмотреть всю эволюцию, т.е. эволюцию на всех временах $-\infty < t < +\infty$ такой Вселенной без сингулярностей, то в какой-то момент времени появятся неустойчивости $\rightarrow$ **No-Go теорема**.
  M.Libanov, S.Mironov, V.Rubakov' 2016, T.Kobayashi'2016, S. Mironov, V. Rubakov, V. Volkova'2018

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

- Возмущенная метрика имеет вид:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right),$$

где

$$\gamma_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta}(\delta_{ij} + h_{ij} + \ldots), \quad N = N_0(t)(1+\alpha), \quad N_i = \partial_i \beta.$$

где $h_{ii} = 0, \partial_i h_{ij} = 0$. Заметим, что α и β нединамические степени свободы. Также мы работаем в **унитарной калибровке** $\delta\varphi = 0$.

- **Лагранжиан второго порядка** для ζ и h_{ij}:

$$\mathcal{L}_{\zeta\zeta} = a^3\left[\mathcal{G}_S\frac{\dot{\zeta}^2}{N^2} - \frac{\mathcal{F}_S}{a^2}\zeta_{,i}\zeta_{,i}\right], \; \mathcal{L}_{hh} = \frac{a^3}{8}\left[\mathcal{G}_T\frac{\dot{h}_{ij}^2}{N^2} - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2}h_{ij,k}h_{ij,k}\right].$$

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

- Так, например, для Вселенной с отскоком, эволюция которой начинается со сжатия, имеем $a(t) \to \infty$ при $t \to -\infty$; условия No-Go теоремы выполнены, если

$$\int_{-\infty}^{t} a(t)(\mathcal{F}_T + \mathcal{F}_S)dt = \infty \ ,$$
$$\int_{t}^{+\infty} a(t)(\mathcal{F}_T + \mathcal{F}_S)dt = \infty \ .$$

- No-Go: $\mathcal{F}_{S,T} < 0$ в какой-то момент времени, **неустойчивость**.

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

- Можно обратиться к теориям “beyond Horndeski theories” $\rightarrow$ возможно построение и самой несингулярной эпохи с нарушением NEC, и устойчивого классического решения на всех временах *Cai et.al.' 2016, Creminelli et.al.'2016, Kolevatov et.al.'2017, Cai, Piao'2017, Mironov, Rubakov, Volkova'19,'20,'22*
- Или же можно построить такую модель, в которой $\mathcal{F}_{S,T}$:

$$\mathcal{F}_{S,T} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty, \text{ где } \mathcal{F}_T = 2G_4.$$

- Однако, это же означает, что

$$G_4 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

- Эффективная масса Планка (напомним, что $G_N = \frac{1}{M_{Pl}^2}$) стремится к нулю, что является наивным сигналом о том, что в теории может быть режим **сильной связи** при $t \rightarrow -\infty$.

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

- Критерий отсутствия проблемы сильной связи на ранних временах: **Классические масштабы энергии** $\ll$ **Масштабы энергии сильной связи**.
- Характерный классический энергетический масштаб определяется фоновым решением, например это может быть H, $\frac{\dot{H}}{H}$, $\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}$.
- Масштаб сильной связи $\rightarrow$ из размерного анализа действия **третьего порядка** (взаимодействие возмущений над фоном).
- Показано, что применение классического полевого описания решений законно на $t \rightarrow -\infty$ в определенной области параметров лагранжиана.

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

Схематично все слагаемые в **кубическом действии** скалярного сектора имеют вид:

$$\mathbb{L}^{(i)}_{\zeta\zeta\zeta} \sim \Lambda_i \cdot \zeta^3 \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i} \ ,$$

где a_i и b_i - это количество производных по времени и координатам. Канонические нормированное поле:

$$\pi = \sqrt{2\mathcal{G}_S}\zeta \propto |t|^{-\alpha+\delta/2}\zeta \ ,$$

так что

$$\mathbb{L}^{(i)}_{\zeta\zeta\zeta} \sim \hat{\Lambda}_i \cdot \pi^3 \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i}, \text{ где } \hat{\Lambda}_i = \Lambda_i \mathcal{G}_S^{-3/2} \sim |t|^{x_i - \frac{3}{2}(\delta-2\alpha)}$$

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

- Размерность $[\hat{\Lambda}_i] = 1 - a - b$;
- Тогда энергетический масштаб сильной связи для каждого слагаемого с $\mathbb{L}^{(i)}_{\zeta\zeta\zeta}$

$$E^{\zeta\zeta\zeta,(i)}_{strong} \sim \hat{\Lambda}_i^{-\frac{1}{a_i+b_i-1}} \sim |t|^{-\frac{x_i+3\alpha-3\delta/2}{a_i+b_i-1}} \;;$$

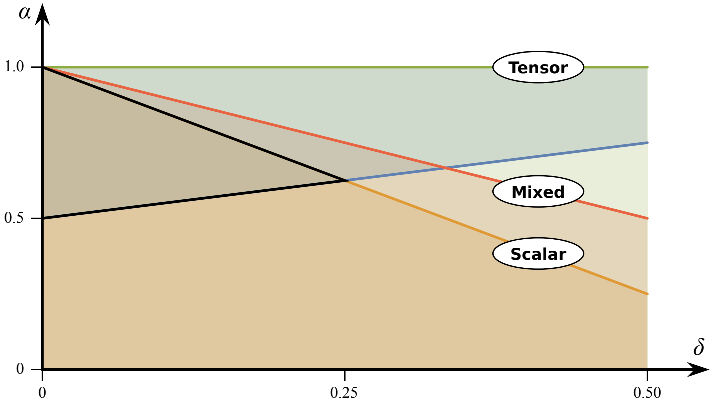
- Классический масштаб энергии

$$E_{class} \sim \frac{\dot{H}}{H} \sim |t|^{-1} \;;$$

- $E_{class} \ll E^{\zeta\zeta\zeta,(i)}_{strong}$ для каждого i:

$$x_i + 3\alpha - \frac{3}{2}\delta < a_i + b_i - 1 \;, \qquad i = \overline{1,17} \;.$$

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение



2. Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

- Продолжаем работать в подклассе теории Хорндески:

$$\mathcal{L} = G_2(\varphi, X) - G_3(\varphi, X)\Box\varphi + G_4(\varphi)R,$$

- Удобнее работать в гамильтоновой формулировке (в формализме АДМ):

$$\mathcal{L} = A_2(t, N) + A_3(t, N)K + A_4(t)(K^2 - K_{ij}^2) + B_4(t)R^{(3)}.$$

- Анзац:

$$A_2 = \frac{1}{2}f(t)^{-2\mu-2} \cdot a_2(t, N), \quad A_3 = \frac{1}{2}f(t)^{-2\mu-1} \cdot a_3(t, N),$$

$$A_4 = -B_4 = -\frac{1}{2}f(t)^{-2\mu},$$

$$a_2(t, N) = \left(\frac{x(t)}{N^2} + \frac{v(t)}{N^4}\right), \quad a_3(t, N) = \frac{y(t)}{N^3}.$$

Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Устойчивая космологическая модель с **отскоком**, которая состоит из следующих этапов:

- эпоха сжатия, на которой масштабный фактор зависит от времени степенным образом;

Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Устойчивая космологическая модель с **отскоком**, которая состоит из следующих этапов:

- эпоха сжатия, на которой масштабный фактор зависит от времени степенным образом;
- отскок;

Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Устойчивая космологическая модель с **отскоком**, которая состоит из следующих этапов:

- эпоха сжатия, на которой масштабный фактор зависит от времени степенным образом;
- отскок;
- инфляция, на протяжении которой параметр Хаббла остается постоянным по времени;

Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Устойчивая космологическая модель с **отскоком**, которая состоит из следующих этапов:

- эпоха сжатия, на которой масштабный фактор зависит от времени степенным образом;
- отскок;
- инфляция, на протяжении которой параметр Хаббла остается постоянным по времени;
- эпоха с безмассовым скалярным полем, на которой скалярное поле из лагранжиана Хорндески становится просто безмассовым скалярным полем с кинетическим членом стандартного вида, а гравитация описывается ОТО (эпоха “kination”).

Устойчивая космологическая модель с **отскоком**, которая состоит из следующих этапов:

- эпоха сжатия, на которой масштабный фактор зависит от времени степенным образом;
- отскок;
- ~~инфляция;~~
- эпоха с безмассовым скалярным полем, на которой скалярное поле из лагранжиана Хорндески становится просто безмассовым скалярным полем с кинетическим членом стандартного вида, а гравитация описывается ОТО (эпоха “kination”).

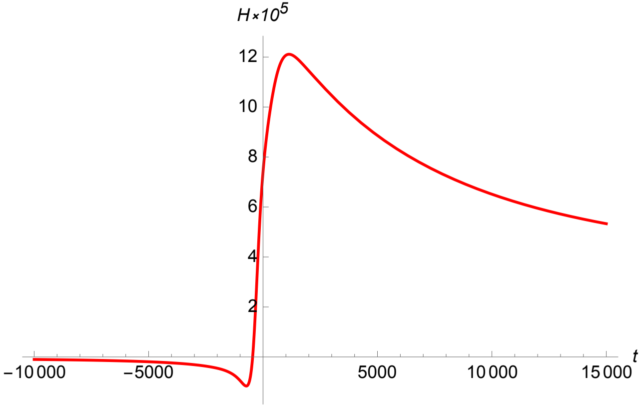
Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

- Построение таких моделей действительно возможно, для этого следует найти (подобрать) функции лагранжиана $x(t), v(t), y(t), f(t)$.
- Пример вида одной из таких функций:

$$x(t) = x_0(1 - U_x(t)) + x_1 U_x(t)\big(1 - V(t - t_*)\big) + x_2 \frac{V(t - t_*)}{(t - t_*)^2}.$$

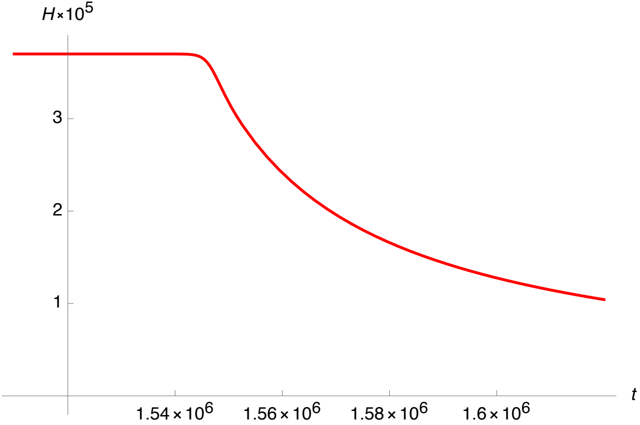
- Такие функции лагранжиана определяют эволюцию в каждый момент времени!

Вселенная с отскоком, последующей инфляцией и эпохой с безмассовым скалярным полем



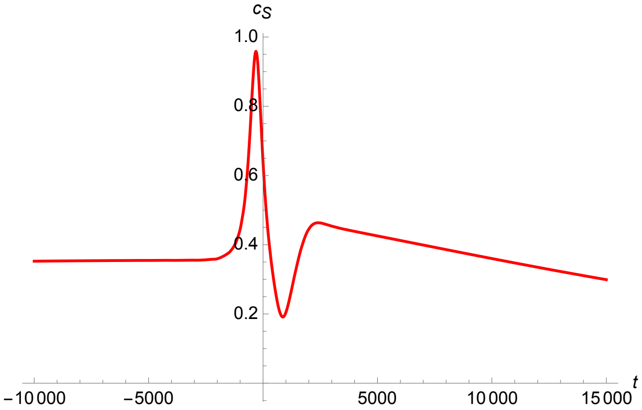
Параметр Хаббла: сжатие, отскок, начало инфляции.

Вселенная с отскоком, последующей инфляцией и эпохой с безмассовым скалярным полем



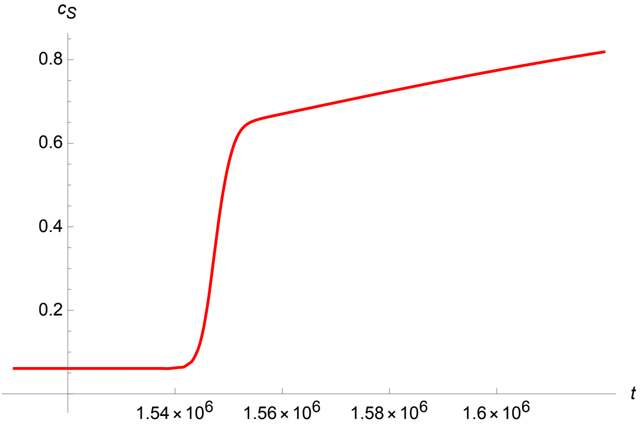
Параметр Хаббла: конец инфляции, начало эпохи с безмассовым полем и ОТО.

Вселенная с отскоком, последующей инфляцией и эпохой с безмассовым скалярным полем



Сжатие, отскок, начало инфляции.

Вселенная с отскоком, последующей инфляцией и эпохой с безмассовым скалярным полем



Конец инфляции, начало эпохи с безмассовым полем и ОТО.

3. Проблемы размерного анализа сильной связи

- Исследуем проблему сильной связи на ранних временах в модели сжимающейся Вселенной в системе координат (frame) Йордана, которая **конформно** ($g_{\mu\nu} = f^{-2}(\varphi) g_{I\,\mu\nu}$) связана **с некоторой моделью инфляции** в системе координат Эйнштейна.
- Наивный размерный анализ в системе координат Йордана показывает, что теория может находится в режиме сильной связи.
- Однако, в выбранной модели инфляции **нет никакого масштаба сильной связи** (а самый большой энергетический масштаб - масса Планка).
- **Вычисления амплитуд рассеяния** и соответствующих энергий подтверждают, что в теории, которая конформно связана с моделью инфляции, проблема сильной связи отсутствует!

4. Соотношение унитарности и унитарные ограничения и их применение для анализа проблемы сильной связи

- Получено обобщение соотношения унитарности для парциальных амплитуд для процессов рассеяния “два-в-два” в теориях вида

$$S = \sum_i S_{\varphi_i} \; , \qquad S_{\varphi_i} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi_i}^2 - \frac{1}{2} u_i^2 (\vec{\nabla} \varphi_i)^2 \right) \; .$$

Обобщение имеет вид

$$\mathrm{Im}\, a_{l,\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{l,\alpha\gamma} \frac{g_\gamma}{u_{\gamma 1} u_{\gamma 2} (u_{\gamma 1} + u_{\gamma 2})} a^*_{l,\gamma\beta} \; ,$$

где $g_\gamma = 2$ соответствует случаю различимых частиц в промежуточном состоянии, а $g_\gamma = 1$ – идентичных частиц.

Положения, выносимые на защиту

- Несингулярная, устойчивая на протяжении всего времени эволюции Вселенной модель **генезиса** может быть построена в рамках подкласса теории Хорндески. В такой модели, согласно размерному анализу действия третьего порядка по возмущениям метрики, **отсутствует режим сильной связи** на ранних временах.
- **Полная эволюция** ранней Вселенной, которая начинается с конкретных несингулярных эпох – сжатия с отскоком, генезиса, а также их модификаций – может быть построена в рамках подкласса теории Хорндески, с конкретным видом функций лагранжиана этой теории. Показано, что эти модели устойчивы на всех временах и находятся вне режима сильной связи. Указанные ранние эпохи могут быть сшиты с последующей эпохой инфляции, а далее может происходить устойчивый переход с инфляции на стадию, где динамика определяется безмассовым действительным скалярным полем, а гравитация описывается ОТО.

Положения, выносимые на защиту

- **Наивный размерный** анализ масштаба сильной связи **не всегда дает правильный ответ** и для того, чтобы определить применимость классического описания в некоторых моделях требуется проводить более точный анализ проблемы сильной связи **с помощью диаграммной техники**, условия унитарности S-матрицы и унитарных ограничений.
- В теории, которая содержит скалярные поля с **различными скоростями звука**, могут быть получены **соотношения унитарности** для парциальных амплитуд для процессов рассеяния $2 \to 2$. Используя соотношения унитарности, можно получить унитарные ограничения. Последние, в свою очередь, могут быть полезны при получении более точных оценок масштаба энергии сильной связи в различных космологических моделях ранней Вселенной.

Публикации по теме диссертации

- **Horndeski Genesis: strong coupling and absence thereof**
  Y. Ageeva, O. Evseev, O. Melichev, V. Rubakov
  EPJ Web of Conf 191 07010, 2018, [1810.00465];
- **Toward evading the strong coupling problem in Horndeski genesis**
  Y. Ageeva, O. Evseev, O. Melichev, V. Rubakov
  Physical Review D 102 (2) 023519, 2020, [2003.01202];
- **Nonsingular cosmological models with strong gravity in the past**
  Y. Ageeva, P. Petrov, V. Rubakov
  Physical Review D 104 (6) 063530, 2021, [2104.13412] ;
- **Unitarity relation and unitarity bounds for scalars with different sound speeds**
  Y. Ageeva, P. Petrov, Phys. Usp., 2022, [2206.03516];
- **On the strong coupling problem in cosmologies with "strong gravity in the past"**
  Y. Ageeva, P. Petrov, Modern Physics Letters A 37 (26) 2250171, 2022, [2206.10646].

Спасибо за внимание!

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

$$S^{(3)}_{\zeta\zeta\zeta} = \int N dt\, a^3 d^3x \Bigg\{ \Lambda_1 \frac{\dot{\zeta}^3}{N^3} + \Lambda_2 \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2}\zeta + \Lambda_3 \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2}\partial^2\zeta + \Lambda_4 \frac{\dot{\zeta}}{N}\zeta\partial^2\zeta$$
$$+ \Lambda_5 \frac{\dot{\zeta}}{N}\left(\partial_i\zeta\right)^2 + \Lambda_6\zeta\left(\partial_i\zeta\right)^2 + \Lambda_7 \frac{\dot{\zeta}}{N}\left(\partial^2\zeta\right)^2 + \Lambda_8\zeta\left(\partial^2\zeta\right)^2 + \Lambda_9\partial^2\zeta\left(\partial_i\zeta\right)^2$$
$$+ \Lambda_{10} \frac{\dot{\zeta}}{N}\left(\partial_i\partial_j\zeta\right)^2 + \Lambda_{11}\zeta\left(\partial_i\partial_j\zeta\right)^2 + \Lambda_{12} \frac{\dot{\zeta}}{N}\partial_i\zeta\partial^i\psi + \Lambda_{13}\partial^2\zeta\partial_i\zeta\partial^i\psi$$
$$+ \Lambda_{14} \frac{\dot{\zeta}}{N}\left(\partial_i\partial_j\psi\right)^2 + \Lambda_{15}\zeta\left(\partial_i\partial_j\psi\right)^2 + \Lambda_{16} \frac{\dot{\zeta}}{N}\partial_i\partial_j\zeta\partial^i\partial^j\psi + \Lambda_{17}\zeta\partial_i\partial_j\zeta\partial^i\partial^j\psi \Bigg\}$$

где $\partial^2 = \partial_i\partial_i$, $\psi = (1/N)\partial^{-2}\dot{\zeta}$, и $\Lambda_1 ... \Lambda_{17}$ это функции t и все они степенным образом зависят от времени на $t \to -\infty$:

$$\Lambda_i \sim (-t)^{x_i}, \quad x_i - \text{это комбинации из } \alpha \text{ и } \delta.$$

Модель генезиса: Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение

Условия применимости классического описания:

$$
\begin{aligned}
&\text{скалярный сектор} && 2\alpha < 2 - 3\delta, \\
&\text{тензорный сектор} && \alpha < 1, \\
&\text{смешанный сектор} && \alpha < 1 - \delta, \\
&\text{генезис + обход No-Go} && \delta > 0, \quad 2\alpha > 1 + \delta\ .
\end{aligned}
$$

Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Устойчивая космологическая модель с **генезисом**, которая состоит из следующих этапов:

- генезис;

Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Устойчивая космологическая модель с **генезисом**, которая состоит из следующих этапов:

- генезис;
- инфляция, на протяжении которой параметр Хаббла остается постоянным по времени;

Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Устойчивая космологическая модель с **генезисом**, которая состоит из следующих этапов:

- генезис;
- инфляция, на протяжении которой параметр Хаббла остается постоянным по времени;
- эпоха с безмассовым скалярным полем, на которой скалярное поле из лагранжиана Хорндески становится просто безмассовым скалярным полем с кинетическим членом стандартного вида, а гравитация описывается ОТО (эпоха “kination”).

Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Устойчивая космологическая модель с **генезисом**, которая состоит из следующих этапов:

- генезис;
- ~~инфляция;~~
- эпоха с безмассовым скалярным полем, на которой скалярное поле из лагранжиана Хорндески становится просто безмассовым скалярным полем с кинетическим членом стандартного вида, а гравитация описывается ОТО (эпоха “kination”).